# הזוויות הקסומות של הטבע

## על הקשר בין כמה זוויות מיוחדות לממדי המרחב

העשרה

**עמוס כהן - מנהל אקדמי-פדגוגי של מרכז אחר"ת ומנהל בית המדרש 'נקודת ארכימדס' בגליל המערבי, מרצה לפיזיקה ולהוראת המדעים באורנים - המכללה האקדמית לחינוך.**

**אורית כהן שניר - אנתרופולוגית, חוקרת ומפתחת בתחומי הוראת המדעים.**

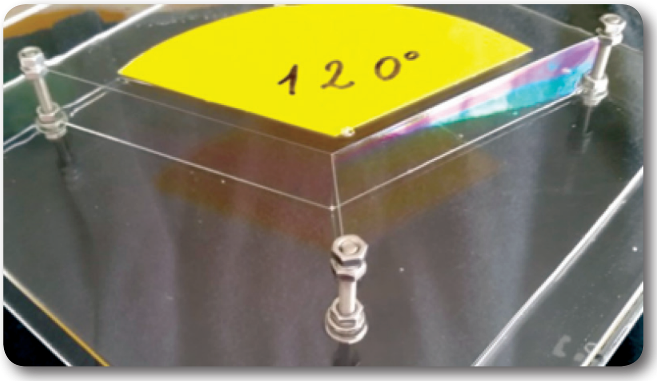
הפיזיקאי החוקר, המנסה לפענח את סודות הטבע, מָשׁוּל לשחקן ברידג׳ המשחק מול אלוהים (או מול הטבע) במגמה לפענח את סודות היקום. הטבע מחזיק את הקלפים שלו צמוד לחזה ובדרך כלל לא ניתן לחשוף את קלפיו בקלות.

**בחינת הזוויות הקסומות של הטבע מאפשרת לנו ״הצצה חטופה אל הקלפים״ של הטבע.**

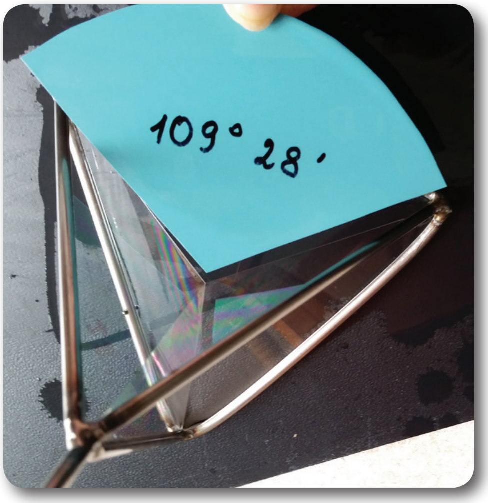
- היכן ניתן להבחין בזוויות הקסומות של הטבע?
- מה משמעותן של הזוויות הקסומות של הטבע, מה הן מייצגות?

חוקרים ומורים נעזרים מפעם לפעם בהדגמות של קרומי סבון על מנת לגלות ולבאר את אופיים של עקרונות היסוד בטבע אשר מכתיבים מבנה סדור של החומר וכן עיון בבעיות אופטימיזציה שונות ומגוונות.

המשטחים המינימליים שקרום הסבון יוצר כאשר הוא נפרש על פני מסגרת נתונה, מציגים לפנינו תמונה מעניינת: במישור הדו-ממדי אנו רואים כי קרום הסבון עשוי להסתדר בצמתים. כל צומת בנוי משלוש קרניים הנפגשות בנקודה אחת בזוויות שוות של $120°$. תכונה זו עולה מבעיית פרמה-טוריצ׳לי, וכן מהכללה שלה במשפט שטיינר. במרחב התלת-ממדי, כיסוי גופים תלת-ממדיים ביריעת סבון מציג מצב שבו נוצרים קווי תפר בין מישורי קרום הסבון. כל ארבעה קווי תפר נפגשים בנקודה אחת, קדקוד פלאטו, בזוויות שוות של $109° 28'$ (דה-שליט, 2009; כהן, 2001; לוז, 1982, 1983; גרשוביץ, 1982; קופיץ, 2001; Boys, 1959; Courant and Robbins, 1951).




כריך פֶּרְסְפֶּקְס בעל שלושה קדקודים טבול בתמיסת מי סבון. במבט מלמעלה מתקבלות שלוש קרניים הנפגשות בצומת שטיינר בזווית של $120°$




ארבעון (טֶטְרָאֶדֶר) טבול בתמיסת מי סבון, מתקבלים ארבעה קווי תפר הנפגשים בקדקוד פלאטו בזווית של $109° 28'$

לאור הדברים הללו, ניתן לחדד מעט יותר את השאלות העולות מן הדיון עד כה:
האם ישנן זוויות קסומות נוספות של הטבע, שעד כה לא הבחנו בהן?
האם נוכל לנסח משפט הכללה רחב, כך שהזוויות $120^\circ$, $109^\circ\ 28'$ הן מקרים פרטיים של אותו המשפט?
היכן מסתתרת כאן התלות בממד המרחב?

על שאלות אלו המאמר מנסה לענות.
המאמר מציע משפט הכללה מתמטי, העונה על הבעיות הפיזיקליות שעולות מחקר קרומי הסבון.

**הפיזיקה מהווה לעתים מנוע המחולל מוטיבציה להוכחה מתמטית**
**וגם מצפן המצביע על הכיוון הראוי לאותה ההוכחה המתמטית.**

## רקע לדיון על הזוויות הקסומות של הטבע

בחקר אמפירי של בעיות במישור הדו-ממדי אנו נוהגים להשתמש ב״כריך״ העשוי מזוג לוחות פרספקס שקופים, המוחזקים במרווח קבוע זה מזה על ידי מספר ברגים. למתקן זה אנו קוראים ״כריך סבון״ (כהן, 2001). כאשר נטבול ״כריך סבון״ בתמיסת מי הסבון נגלה כי קרום הסבון מוצא את המסלולים החסכוניים ביותר* המחברים את הקדקודים (הברגים). במקרים מסוימים הסבון יוצר נקודות צומת: כל נקודת צומת מורכבת משלוש קרניים הנפגשות בנקודה אחת בזוויות שוות בנות $120^\circ$.

נקודה זו מכונה ״צומת שטיינר״, על שמו של המתמטיקאי הברלינאי בן המאה ה-19 יעקב שטיינר (Jakob Steiner 1796-1863).

בחקר בעיות במרחב התלת-ממדי, כאשר נטבול במי הסבון ארבעון, נגלה למרבית ההפתעה כי יריעת הסבון שנפרשה נאחזת בכל המִקצועות. מתקבלת יריעה מיוחדת הבנויה משישה מישורים. כל שלושה מישורים סמוכים נפגשים ביניהם לאורך קו תפר בזווית של $120^\circ$ . נוצרו ארבעה קווי תפר. ארבעת קווי התפר הללו נפגשים בנקודה מרכזית בזוויות שוות בנות $109^\circ\ 28'$. נקודה זו מכונה קדקוד פלאטו, על שמו של הפיזיקאי הבלגי בן המאה ה-19 יוסף פלאטו (J. A. F. Plateau 1801-1883), וכל אחת מהזוויות מכונה ״זווית פלאטו״. פלאטו זכור בייחוד בשל תרומתו למתמטיקה בתחום הנקרא ״בעיות פלאטו״: חקר משטחים מינימליים המכסים מסגרת נתונה. פלאטו הציע דרך ניסויית להתבונן במשטחים מינימליים – ככלי לסייע במחקר המתמטי התאורטי**.

## הזוויות הקסומות של הטבע – במערכת סימטרית ויציבה (בשיווי משקל)

### שיווי משקל סטטי

תופעת הזוויות הקסומות של הטבע קשורה קשר הדוק למצב של שיווי משקל סטטי ויציבות.
כזכור, שתי דרישות מאפיינות מצב של **שיווי משקל סטטי**:

- התנע הקווי של מרכז המסה – שווה לאפס.
- התנע הזוויתי סביב מרכז המסה (או סביב כל נקודה אחרת) שווה לאפס.

* המסלולים החסכוניים ביותר הם המסלולים שמחברים את הקדקודים הנתונים, בקו שאורכו הכולל מינימלי.
** הרחבה על חקר המשטחים המינימליים באמצעות קרומי הסבון, ראו בספרו של עמוס כהן "טוב מעשה במחשבה תחילה", מכון מופ"ת 2001, בפרקים ז', ח', ט'.

משתי הדרישות הללו ניתן לגזור שתי דרישות חלופיות שצריכות להתמלא כדי שגוף יהיה נתון בשיווי משקל:

- הסכום הווקטורי של כל הכוחות החיצוניים הפועלים על הגוף – חייב להיות שווה לאפס.
- הסכום הווקטורי של כל מומנטי הסיבוב החיצוניים הפועלים על הגוף, כפי שהם נמדדים ביחס לכל נקודה, חייב אף הוא להיות שווה לאפס.

אם גוף חוזר לשיווי משקל סטטי לאחר שכוח העתיקו, אנו אומרים שהגוף נתון **בשיווי משקל סטטי יציב** (קמינגז ואחרים, 2010: 403-404).

במערכת קרומי הסבון, כאשר יריעת הסבון נכרכת סביב מסגרת נתונה, הכוחות האלסטיים של קרום הסבון פועלים במגמה להקטין את אנרגיית שטח הפנים של קרום הסבון ובה בעת מצמצמים את שטח יריעת הסבון. לאחר זמן קצר תגיע מערכת קרום הסבון למצב של שיווי משקל סטטי יציב.

תופעת 'הזוויות הקסומות' מתקבלת במערכות רבות בטבע, ובמיוחד מתרחשת התופעה במערכת קרומי סבון המכסים מסגרת נתונה, כאשר קרום הסבון **'מתכווץ ומתכווץ עד למצב שאין להתכווץ ממנו יותר'**. במצב זה מערכת קרומי הסבון נמצאת בשיווי משקל סטטי יציב. התייצבות המערכת תתרחש בנקודה שבה האנרגיה הפוטנציאלית של המערכת היא מינימלית.

מאמר זה בוחן אם קיים קשר בין הזוויות הקסומות של הטבע לבין ממדי המרחב. לשם כך אנו מציעים להמשיג את המושג הבא: '**איזון יציב של כוחות**'. נתחיל בהגדרת המושג ואחר-כך נוכיח באמצעותו כי אכן קיים קשר בין הזוויות הקסומות של הטבע לבין ממדי המרחב.

**הגדרה**

'**איזון יציב של כוחות**' הנו מצב שבו מתקיימות שתי הדרישות הבאות:

א. שקול הכוחות הפועלים על גוף נקודתי הנמצא בנקודה O במרחב – הנו אפס.

ב. הגוף חוזר לשיווי משקל סטטי – לאחר שכוח רגעי כלשהו העתיקו (הכוח פעל זמן מה... וחדל לפעול).

**מדוע נחוצה הדרישה השנייה**: הדרישה השנייה מבטיחה כי בכל כיוון אפשרי באותו מרחב יפעל כוח מחזיר, אשר יגרום לגוף לחזור לנקודת שיווי משקל סטטי יציב.

על מנת להמחיש את הצורך בדרישה השנייה, נתבונן במערכת הבאה:
במישור הדו-ממדי נתונה מערכת שבה פועלים שני וקטורים שווים בגודלם ומנוגדים בכיווניהם: $-y$ , $+y$ .
מערכת זו מקיימת היטב את הדרישה הראשונה, ששקול הכוחות הפועלים על גוף נקודתי הנמצא בנקודה O במרחב – הנו אפס.
אך **הדרישה הראשונה אינה מספיקה ליצור איזון יציב של כוחות**. שהרי אם נפעיל לרגע כוח מעתיק בכיוון x, הוא יישאר ללא מענה, משום שאין במערכת הכוחות הנתונה ($-y$ , $+y$), כוח מחזיר בכיוון x. לכן הגוף לא יחזור לשיווי משקל סטטי יציב.

כדי שנוכל להמשיך ולבחון את הקשר שבין הזוויות הקסומות של הטבע לבין ממדי המרחב, עלינו לטעון את טענת העזר הבאה.

### טענת עזר

**במרחב ה-D ממדי, דרושים לכל הפחות D+1 וקטורים, המושכים נקודה O על מנת לאפשר ׳איזון יציב של כוחות׳ של הנקודה במרחב.**

### הוכחה

בלי הגבלת הכלליות אנו יכולים להתחיל למשוך את הנקודה O באמצעות D וקטורים בכיווני הצירים של מערכת צירים אורתוגונלית, הפורשׂת את המרחב (המרחב ה-D ממדי נפרש בדיוק על ידי D וקטורים כאלה).
מיד יתברר לנו כי לא השגנו יציבות לגבי פעולת המשיכה של הווקטורים: מבחינתו של הציר הראשון, הנקודה רק נמשכת בכיוון החיובי של הציר, ואין וקטור המאזן אותה לאורך הציר הראשון. את אותו השיקול אפשר להפעיל גם לגבי כל שאר הצירים. מכאן שדרוש לנו וקטור נוסף, אחד לפחות, שיכיל רכיב שלילי של הציר הראשון, רכיב שלילי של הציר השני, וכן הלאה – כך שהשקול של כל אלה יהיה אפס, כלומר, יתקבל ׳איזון יציב של כוחות׳. לכן **דרושים לפחות D+1 וקטורים המושכים את הנקודה O על מנת שניתן יהיה להגיע לאיזון יציב של כוחות.**

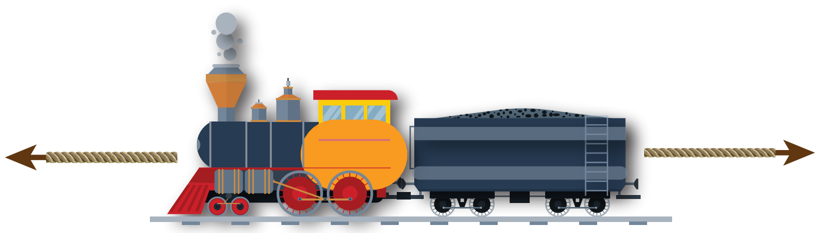
**מ. ש. ל.**

### בדיקה

בקרומי הסבון ראינו כי:
במישור **הדו-ממדי** עשויה להתקבל נקודת צומת יציבה על ידי **שלוש** קרניים המושכות נקודה זו בזוויות שוות של $120°$, צומת שטיינר.
במרחב **התלת-ממדי** עשויה להתקבל נקודת צומת **יציבה** על ידי **ארבע** קרניים (קווי תפר), המושכות נקודה זו בזוויות שוות של $109° 28'$, קדקוד פלאטו.

למעשה, בעקבות הדיון הזה ניתן לדון גם במרחב **החד-ממדי**. נניח שאנו מבקשים לייצב קרון רכבת על מסילה ישרה. דרושים לנו **שני חבלים** שימשכו את הקרון – האחד קדימה והאחר אחורה.
ובכן, גם כאן מתקיים הכלל הזה:

- במרחב החד-ממדי עשויה להתקבל נקודת צומת יציבה על ידי זוג קרניים המושכות נקודה זו בזוויות שוות של $180°$ . הקרניים הן בעלות כיוון ועוצמה, לכן ניתן לכנותן וקטורים.



**קרון רכבת מיוצב על מסילה ישרה באמצעות שני חבלים**

נתקבלו אם כן שלוש זוויות מיוחדות בנות: $120°$, $180°$ , $109° 28'$. האם הזוויות הללו קשורות באופן מסוים למרחב, לממד של המרחב?

שתי הזוויות הראשונות, הזוויות של $120°$, $180°$ מתקבלות באופן טריוויאלי מתוך הדרישה למערכת סימטרית במרחבים החד-ממדי והדו-ממדי.
אך כיצד ניתן להבין וכיצד ניתן לחשב את הזווית במרחב התלת-ממדי, הזווית של פלאטו של $109° 28'$?

**נערוך חישוב גאומטרי של זווית פלאטו**: נחשב את הזווית $\theta$ העולה מבעיית פלאטו במרחב התלת-ממדי. נכנה אותה "הזווית $\theta$ של פלאטו". נתבונן בארבעון (טטראדר, Tetrahedron) משוכלל.

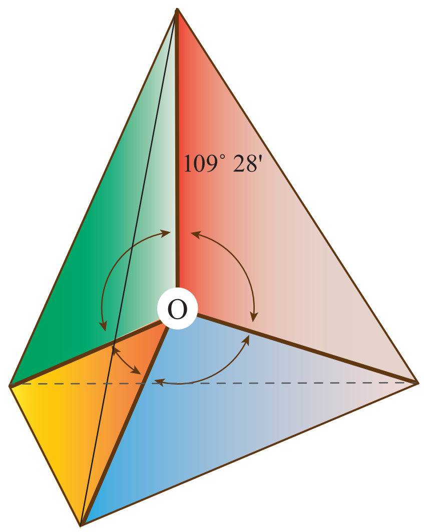
### הגדרה

ארבעון הוא פירמידה משולשת. גוף שכל ארבע פאותיו הן משולשים.
לארבעון 4 קדקודים, 4 פאות ו-6 מִקְצוֹעוֹת.

### הגדרה

**ארבעון משוכלל** הוא ארבעון שכל פאותיו הן משולשים שווי-צלעות.

הזווית $\theta$ של פלאטו מוגדרת כך: קיימת נקודה מרכזית O בארבעון משוכלל, כך שמאותה נקודה "רואים" את כל המִקְצוֹעוֹת בזוויות שוות $\theta$.



ניתן להבחין כי את הפירמידה של הארבעון המשוכלל – אפשר להציג כסכום של 4 פירמידות בעלות אותו בסיס, אך בעלות גובה קטן יותר:

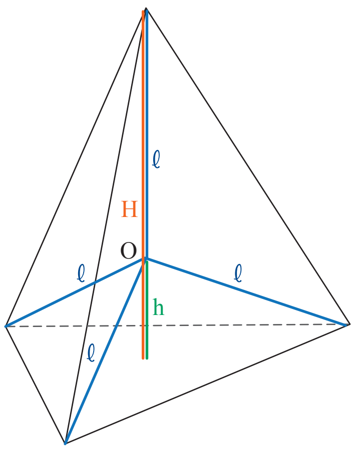

**ארבע פירמידות נמוכות מרכיבות את הפירמידה הגבוהה, הארבעון המשוכלל**

ברור כי נפח הארבעון השלם שווה ל-4 פעמים נפח הפירמידות הקטנות.

$$V = 4\upsilon$$

$$V = \left(\tfrac{1}{3}S_B H\right) = 4\left(\tfrac{1}{3}S_B h\right)$$

**באשר:**




שטח הבסיס של הפירמידה הגדולה שווה לשטח הבסיס של הפירמידה הקטנה ומסומן ב- $S_B$

גובה הפירמידה הגדולה מסומן ב- $H$

גובה הפירמידה הקטנה מסומן ב- $h$

לאחר צמצום נקבל כי הגבהים של הפירמידות השונות מקיימים את הקשר: $H = 4h$

נגדיר קטע $\ell$: ההפרש בין הגובה של הפירמידה הגדולה לגובה הפירמידה הקטנה. עבור קטע זה מתקיים: $\ell = H - h = 3h$

הזווית המשלימה את $\theta$ ל-$180°$ היא: $\bar{\theta}$

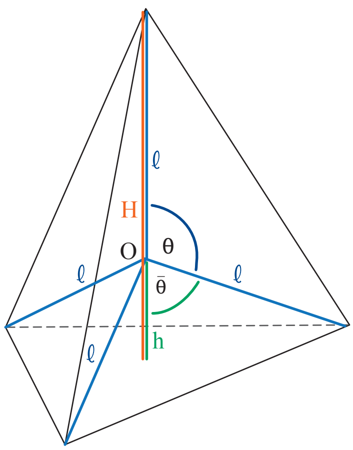
$$\bar{\theta} = 180 - \theta$$

כך שמתקיים: $\cos(\bar{\theta}) = \frac{h}{\ell} = \frac{1}{3}$

כלומר: $\bar{\theta} = \arccos\left(\frac{1}{3}\right) = 70.5288°$

ולכן הזווית $\theta$ מקיימת את הקשר: $\cos(\theta) = \frac{-h}{\ell} = \frac{-1}{3}$

כלומר: $\theta = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right) = 109.4712°$




שזו בדיוק הזווית המשלימה: $109.4712 = 180 - 70.5288$

ברישום של מעלות, דקות, שניות נקבל: $109.4712 = 109°\ 28'\ 16''$

מ. ש. ל.

### ויהי אחר הדברים הללו

מצאנו כי בבעיות במרחב **החד-ממדי** דרושים 2 וקטורים שהזווית ביניהם היא של $180°$, על מנת למשוך את הנקודה O, כך שהנקודה תימצא ב**איזון יציב של כוחות**.

כמו כן נוכחנו כי בבעיות במרחב **הדו-ממדי** דרושים 3 וקטורים המושכים את הנקודה הנמצאת ב**איזון יציב של כוחות**, כאשר הזוויות ביניהם הן של $120°$ (הזווית המוכרת מבעיית שטיינר וכן מבעיית פרמה-טוריצ׳לי).

בשורות האחרונות, כאן למעלה, חישבנו ומצאנו כי בבעיות במרחב **התלת-ממדי** דרושים 4 וקטורים המושכים את הנקודה הנמצאת ב**איזון יציב של כוחות**, כאשר הזוויות שבין הווקטורים הן של $109°\ 28'$ (הזווית של פלאטו).

בדיון הגיאומטרי שערכנו לעיל יש יופי רב, אך הוא אינו נותן לנו עדיין תמונה שלמה.

חסרה הכללה שתענה על השאלות שהצבנו בפנינו:

- האם ישנן זוויות קסומות נוספות של הטבע, אשר קשורות ל**איזון יציב של כוחות** באופן שהוצג כאן?
- מה משמעותן של הזוויות הקסומות של הטבע, מה הן מייצגות?
- היכן מסתתרת כאן התלות בממד המרחב?
- האם נוכל לנסח משפט הכללה רחב, כך שהזוויות הללו הן מקרים פרטיים של אותו משפט?

## משפט הזוויות הקסומות של הטבע במערכת סימטרית ויציבה (בשיווי משקל)

### טענה

קיימת פונקציה פשוטה f של ממד המרחב D, כך שמתקיים: $f(D) = \theta_D$

עבור $D = 1$ תתקבל הזווית: $\theta_1 = 180°$

עבור $D = 2$ תתקבל הזווית: $\theta_2 = 120°$

עבור $D = 3$ תתקבל הזווית: $\theta_3 = 109°\ 28'$

### הוכחה

יהי $R_D$ מרחב אוקלידי בעל D ממדים.

כזכור, ראינו קודם כי על מנת לקיים **איזון יציב של כוחות**, דרושים לפחות $D + 1$ וקטורים שונים. נדרוש כי בנקודת שיווי המשקל יפעלו וקטורים אלו **בעוצמה שווה ובזוויות שוות ביניהם**.

דרישה זו תכונה להלן: **דרישת הסימטריה של המערכת**.

נייצג את הווקטורים הללו על ידי וקטורי יחידה הפועלים בזוויות שוות על הנקודה O.

$$\hat{n}_1 + \hat{n}_2 + \hat{n}_3 + \ \dots\ + \hat{n}_{D+1} = 0$$

נכפיל משוואה זו, מכפלה סקלרית, באחד מווקטורי היחידה***.

*** תודה לדוד אגמון שממנו למדנו את הגישה המתוארת כאן.

כזכור, במרחב האוקלידי, הזווית $\theta$ בין שני וקטורים אוקלידיים $\vec{u},\vec{v}$ קשורה **למכפלה הסקלרית** (dot product) שלהם ולאורכים של הווקטורים על פי הנוסחה: $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|u\|\cos(\theta)\|\upsilon\|$
כמו כן נזכור כי וקטור יחידה הנו וקטור שאורכו 1 $\|\hat{n}\|=1$

בלי הגבלת הכלליות נכפיל את המשוואה ב- $\hat{n}_1$ $\hat{n}_1\cdot(\hat{n}_1+\hat{n}_2+\hat{n}_3+\ \dots\ +\hat{n}_{D+1})=0$

מתקבל: $\hat{n}_1\cdot\hat{n}_1+\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2+\hat{n}_1\cdot\hat{n}_3+\ \dots\ +\hat{n}_1\cdot\hat{n}_{D+1}=0$

כזכור, מכפלת וקטור יחידה בעצמו $\hat{n}_1\cdot\hat{n}_1=1$

ואילו מכפלת וקטורי יחידה שונים: $i\neq j$

$\hat{n}_i\cdot\hat{n}_j=\cos(\theta_{i,j})$

בשל הנחת הסימטריה שהנחנו, כל הזוויות בין וקטורי היחידה – שוות זו לזו.

יש לנו במרחב D ממדי בדיוק D איברים שווים כאלו: $\cos(\theta_{i,j})$

נסמנם: $\cos(\theta_{i,j}) \stackrel{\text{def}}{=\!=} \cos(\theta_D)$

בסך הכול מהמשוואה: $\hat{n}_1\cdot\hat{n}_1+\hat{n}_1\cdot\hat{n}_2+\hat{n}_1\cdot\hat{n}_3+\ \dots\ +\hat{n}_1\cdot\hat{n}_{D+1}=0$

נובע כי: $1+D(\cos(\theta_D))=0$

$$\cos(\theta_D)=\frac{-1}{D}$$

$$\boxed{\theta_D=\arccos\left(\frac{-1}{D}\right)}$$

בכך מצאנו את הפונקציה המבוקשת הנותנת עבור כל ממד שלם $D=1,2,3$

את הזווית $\theta_D$ האופיינית ל**איזון יציב של כוחות** בממד זה.

מ. ש. ל.

**לסיכום**

החידוש העיקרי במאמר זה הנו גילוי הקשר בין ממד המרחב D לבין הזוויות הקסומות של הטבע: $\theta_D=\arccos\left(\frac{-1}{D}\right)$

במרחב חד-ממדי $D=1$ נחוצים 2 וקטורים, והזווית ביניהם תהיה: $\theta_1=\arccos\left(\frac{-1}{1}\right)=180^\circ$

במרחב דו-ממדי $D=2$ נחוצים 3 וקטורים, והזווית ביניהם תהיה: $\theta_2=\arccos\left(\frac{-1}{2}\right)=120^\circ$

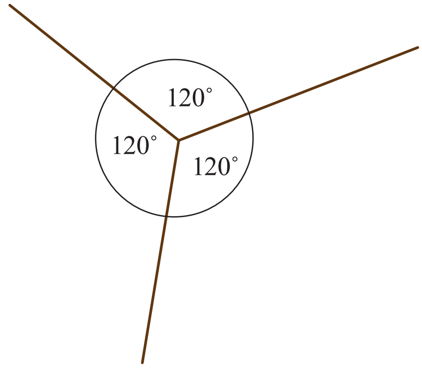
במרחב תלת-ממדי $D=3$ נחוצים 4 וקטורים, והזווית ביניהם תהיה: $\theta_3=\arccos\left(\frac{-1}{3}\right)=109^\circ\ 28'$

ניתן לקבוע כי הזוויות המיוחדות הללו שכינינו אותן **הזוויות הקסומות של הטבע**, מייצגות באופן חד-ערכי את הממד של המרחב, כאשר אנו עוסקים בבעיות של **איזון יציב של כוחות** בין כוחות סימטריים.

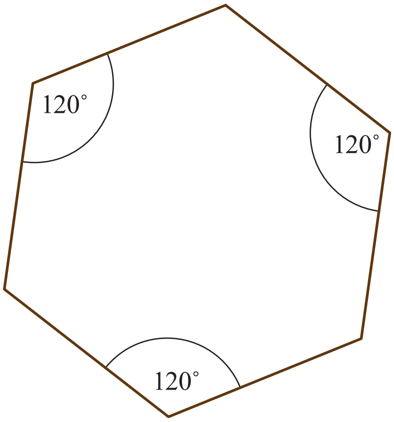
### שתי זוויות קסומות - בחלת הדבש של הדבורים

הזוויות הקסומות הללו במישור הדו-ממדי ובמרחב התלת-ממדי משמשות את דבורת הדבש כאשר היא בונה את חלת הדבש (כהן, 2001: 166-168).

כידוע, התאים בחלת הדבש של הדבורים בנויים כמנסרות בעלות בסיס משושה משוכלל, כשדפנות התאים מחוברות בצמתים שבהם שלוש קרניים נפגשות בזוויות של $120^{\circ}$, וזאת על מנת להשיג חיסכון בדונג, חומר גלם יקר ביותר.



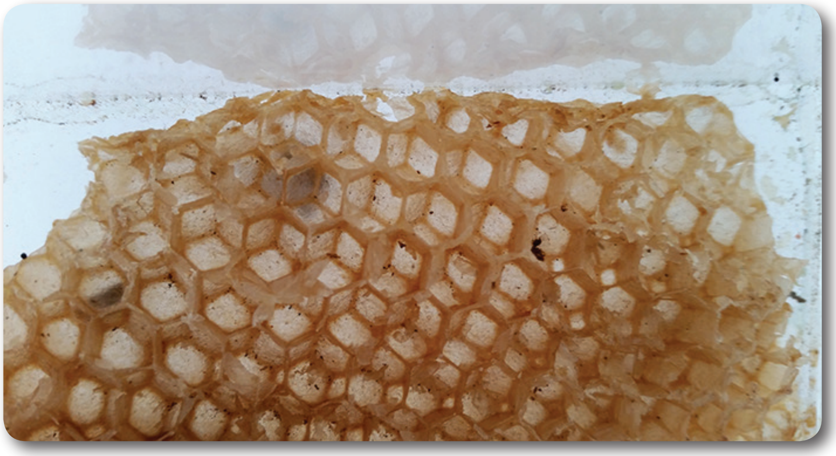
צומת שלוש קרניים הנפגשות בזווית של $120^{\circ}$



משושה משוכלל

כדי להשיג חיסכון נוסף בחומר הגלם היקר, הדונג, הדבורים בונות חזית נוספת של תאים, כשהחזיתות מוצמדות **גב אל גב**. כלומר, הכניסה אל התאים היא משני צִדי החלה. מתברר כי הדרך החסכונית ביותר להצמיד תאים גב אל גב, הנה באופן שבו תא בחזית א׳ מוצמד אל פינה משולשת של שלושה תאים בחזית ב׳, החזית הנגדית.

הזווית החסכונית ביותר לחבר תא כזה אל **פינה משולשת** של תאים, היא בזווית פלאטו של $109^{\circ}\ 28'$. הנה כי כן, הדבורים ״למדו״ באופן כלשהו את משפט שטיינר ואת משפט פלאטו.


חלת דבש הבנויה מתאים משושים כשרצפת כל תא היא בעלת פינה משולשת

**טבלה: הזוויות $\theta_D$ האופייניות לאיזון יציב של כוחות עבור ממד שלם D כלשהו**

| ממד המרחב D | המספר המינימלי של וקטורים הדרושים ל'איזון יציב של כוחות' D+1 | הזווית $\theta_D$ האופיינית לאיזון יציב של כוחות עבור ממד שלם D כלשהו $\theta_D = \arccos\left(\frac{-1}{D}\right)$ (במעלות, בשבר עשרוני) | הזווית $\theta_D$ (במעלות, דקות, שניות) | הערות |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 180 | 180 | רכבת |
| 2 | 3 | 120 | 120 | חלת הדבש |
| 3 | 4 | 109.4712 | 109º 28' 16'' | חלת הדבש |
| 4 | 5 | 104.4775 | 104º 28' 39'' | |
| 5 | 6 | 101.5370 | 101º 32' 13'' | |
| 6 | 7 | 99.5941 | 99º 35' 38'' | |
| 7 | 8 | 98.2132 | 98º 12' 47'' | |
| 8 | 9 | 97.1808 | 97º 10' 50'' | |
| 9 | 10 | 96.3794 | 96º 22' 45'' | |

ניתן לראות כי כאשר ממד המרחב שואף לאינסוף, הזווית $\theta_D$ שואפת ל-$90^\circ$

## שאלות מעניינות להמשך עיון ומחקר:

- מה המשמעות של הזוויות $\theta_D$ במרחב שבו יותר משלושה ממדים?
- האם ישנן תופעות פיזיקליות שבהן מתגלות בטבע הזוויות המתאימות לממדים גבוהים מ-3?
- האם ישנן תופעות פרקטליות שבהן מתקבלות זוויות $\theta_D$ המתאימות למרחב בעל ממד שבור (ממד D שאינו מספר שלם)?

עד כאן הצצה קלה אל הזוויות הקסומות של הטבע. הקסם לא תם, הוא רק מתחיל!

## מקורות


אגמון, דוד (2004). *מכניקה קלאסית ויחסותית*. הוצאת המחבר.

גרשוביץ, ולדימיר (1982). זווית הקסם '28 °109. מדע, כ"ו (4), 174-177, 192.

דה-שליט, אהוד (2009). בעיית עץ שטיינר – דוגמה לשימוש בעקרונות פיסיקליים להתרת בעיה מתמטית. *"תהודה" עתון מורי הפיזיקה, 28* (1-2), 26-31.
http://stwww.weizmann.ac.il/ptc/Tehuda/28-1-2/26-31.pdf

כהן, עמוס (2001). *טוב מעשה במחשבה תחילה: מדריך ללמידה באמצעות פרויקטים מדעיים יצירתיים*. תל-אביב: מכון מופ"ת.
בספר שלושה פרקים העוסקים בהרחבה בקרומי סבון ופתרון בעיות מתמטיות מהחיים: פרקים: ז' – ח' – ט', עמ' 110-200 , בסוף כל פרק מוגשת רשימת מקורות מפורטת ומגוונת.
http://www.mofet.macam.ac.il/ktiva/publish/catalog/Pages/Kalil/tovmase.aspx

לוז, זאב (1982). קרומי סבון ובועות סבון כמודלים מתימטיים. פי האטום, א' (2).

לוז, זאב (1983). קרומי סבון. מדע, כ"ז (1), 13-18.

מובשוביץ הדר, ניצה (1997). חכמת הדבורים. *על"ה – כתב העת למורים למתמטיקה בעל-יסודי* (20).

http://highmath.haifa.ac.il/images/data2/old_alle/alle20-4fixed.pdf

פרנקל, אברהם הלוי (1953-1965). *מבוא למתימטיקה – בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה*. ירושלים: הוצאת י.ל. מאגנס, האוניברסיטה העברית בירושלים, והוצאת "מסדה".

קופיץ, יעקב ש. (2001). בעיית פרמה – טוריצ'לי: על נקודה מיוחדת במשולש ועל שלושה מתמטיקאים שחקרו אותה. *אלף אפס*, (17), 2-9.
http://alefefes.macam.ac.il/article/article.asp?n=30

קמינגז, קרן; לווז, פריסילה ו'; רדיש, אדוורד פ'; קוני, פטריק ג' וטיילור, אדווין פ' (2010). *מבינים פיזיקה – מכניקה: לקורסי מבוא למהנדסים ומדענים.* מבוסס על 'יסודות הפיזיקה', מאת: דייוויד האלידיי, רוברט רזניק וג'רל ווקר. ירושלים: הוצאת ספרים על שם מאגנס, האוניברסיטה העברית, ומכללת אורט בראודה.

Boys, C.V (1959). Soap Bubbles and the Forces which Mould Them. New York: Doubleday and Company.

Courant and Robbins (1941, 1951). What is Mathematics? Oxford University Press. Stiener Problem Ch. VII § 5 (pp. 354-361).

Giomini, C., Marrosu, G. & Cardinali, M.E. (1995). The exploded tetrahedron. Educ. Chem., **32** (p. 38).

Grosjean, C. C., and Rassias, T. M.(1992). Joseph Plateau and His Works. In The Problem Of Plateau (pp. 3-17). NJ: River Edge.

Lovett, David. (1994). Demonstrating Science with Soap Films. Bristol & Philadelphia: Institute of Physics.

Movshovitz-Hadar, N. (1990). Beehive Mathematics. Detailed outlines for "Do Bees Build It Best?" a 2nd year unit of: Interactive Mathematics Program — Three years of problem-based mathematics — a College Preparation Mathematics Program for high school students.

Experimental Edition, Berkeley CA. (Project products are published of 1996 by Key Curriculum Press, California, U.S.A http://www.mathimp.org/).

Tikhomirov, V. M. (1990) .Stories about Maxima and Minima. Salem, MA: American Mathematical Society.

**ברכות לננסי שלו**

**על זכייתך בפרס השנתי למורה המצטיין**

**לפיזיקה עש עמוס דה-שליט לשנת תשע"ו**