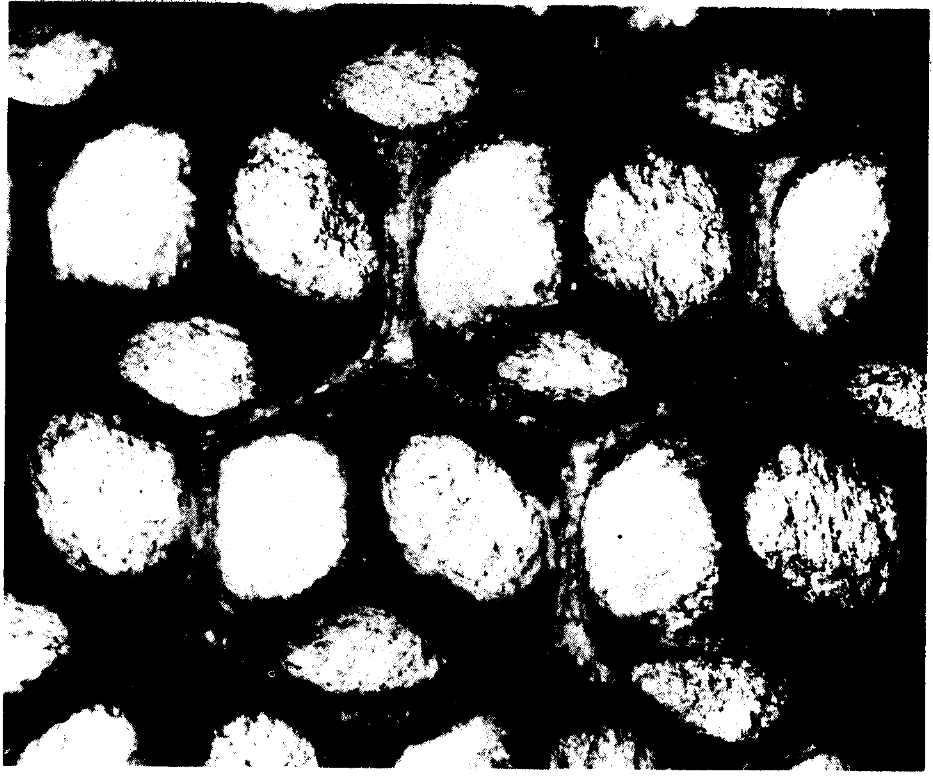
109°28′ זוית הקסם



מאת ולדימיר גרשוביץ

"ביתי בנוי לפי חוקיה של ארכיטקטורה קפדנית ביותר ואוקלידס בעצמו היה יכול ללמוד מחקירת הגיאומטריה של תאי הכוּורת"
(הדבורה, **אלף לילה ולילה**)

הזויות בנות 30°, 45°, 60° ו־90° מוכרות לנו בשל חשיבותן בהנדסה. הזויות 18°, 36°, 54°, 72° ידועות מחתך הזהב. האם זויות אלה גם נפוצות בטבע? בפני הקורא מוצגת עוד זוית בעלת חשיבות בבעיות של אופטימום ושיטה פשוטה לפיתרון בעיות.

וְלָדימיר גרשוביץ (V. Gershovich) **הוא מוסמך במתמטיקה מטעם המכון הפדגוגי הממשלתי במוסקוָה (1958). היה מורה במוסדות גבוהים אחדים בבריה"מ. מאז עליתו לארץ ב־1972, אחרי שנים ארוכות של מאבק, הוא מורה בביה"ס התיכון שליד האוניברסיטה בירושלים ובמרכז ללימודים קדם־אקדמיים באוני־ברסיטה העברית.**

קשה למצוא אדם שלא שמע על המיספר $\pi = 3.1415...$ — היחס שבין הקף המעגל וקוטרו. פחות מוכרים הם המיספרים $e = 2.7182...$ — בסיס הלוגריתמים הטבעיים (ראה במיסגרת), או $\varphi = 1.618$ השווה ליחס הקרוי "חתך הזהב".

גבול הריבית

את המיספר e אפשר לקבל, למשל, באופן הבא: מפקידים בראשית השנה שקל אחד בבנק לתקופה של שנה אחת בריבית של 100%. בסוף השנה נקבל, כמובן, שני שקלים. נניח שקימת אפשרות לחלק תקופה זו לשתי תקופות בנות חצי שנה, שבכל אחת נקבל ריבית של 50%, אלא שזו משתלמת בריבית דריבית. במקרה זה נקבל בסוף השנה $1.5 + 1.5 \times 50\%$ שהם 2.25 שקלים. נניח שאפשר להמשיך תהליך זה ולחלק את התקופה ל־4 חלקים וכך את שיעור הריבית (25% בכל רביע). כעבור שנה נקבל לפי חישוב הריבית דריבית $(1+0.25)^4 = (5/4)^4 \approx 2.44$ שקלים. הבנקים הישראלים, הפועלים בתנאי אינפלאציה, אכן משתמשים בשיטה זו כדי להעלות את שערי הריבית תכופות מבלי שהלווים יהיו ערים לכך. כך ריבית של 100% המחושבת אחת לשלושה חודשים שקולה לריבית שנתית של 144%! האם יתכן להמשיך תהליך זה עד אין סוף ולקבל בסוף השנה סכום אין־סופי? בלשון מתמטית מדובר בשאלה כיצד מתנהגת התבנית $(1 + 1/n)^n$ כאשר n שואף לאינסוף. ישנה הוכחה שלביטוי זה גבול סופי השווה למיספר e שהזכרנו. בסימון מתמטי נקבל: $(1 + 1/n)^n \underset{n\to\infty}{\to} e$ מעניין לחשוב מה היו הבנקים מצליחים לעולל אילמלא היה גבול זה סופי.

האם קיימות זָויות שלערכן המיספרי משמעות מיוחדת? ברצוננו להציג במאמר זה ערך מיוחד של זוית המופיע בהתגלויות שונות בטבע. הזוית בת 109°28′ היא הגיבור הראשי של הסיפור כולו.

תבונתן של הדבורים

המימרה מסיפורי אלף לילה ולילה, הפותחת את המאמר, עומדת על השלֵמות ההנדסית של חלת הדבש. שלמות זו קשורה, בראש ובראשונה, בזוית זו בת 109°28′, שהזכרנו. אם נתבונן בחלת דבש ניצבת, מאחד מצדדיה (תמונה 1), נראה שהיא מורכבת מתאים משושים. מבלי להתעמק בשאלה מדוע צורה סימטרית היא הטבעית למישטר החברתי השורר בכּוֶרת ננסה להבין מדוע נבחרה דוקה הצורה המשושה?

כיסויו המלא, ללא רֶוַח, של מישור, במצולעים משוכללים מסוג אחד, אפשרי רק באמצעות משולשים, ריבועים, ומשושים. אם נתון שטח התא שצורתו מצולע משוכלל, הקפו יהיה מינימאלי, בין המצולעים הנ"ל, במשושה. היחסים שבין הקפי המצולעים שוי־השטח הם:

$$P_\triangle : P_\square : P_\hexagon = 1 : 0.877 : 0.816$$

לא יקשה על הקורא להוכיח יחס זה בכוחות עצמו. מכאן שכמות הדונג הדרושה לבנִיָתה של חלת־הדבש בנפח נתון היא מינימאלית אם התאים הם משושים.

הבה נציץ לתוך אחד התאים בחלת הדבש. עומקו של התא הוא כ־11.3 מ"מ. אורכה של צלע המשושה הוא 2.71 מ"מ. במרכזה של החלה קשור התא אל תא נגדי שהכניסה אליו מצידה השני של החלה. כיצד, סבור הקורא, נראית תחתית התא? לפי תומנו היינו סבורים בוודאי כי היא מישורית. אולם אם נתבונן בתשומת לב בתא נקי ויבש, שהדבש הוצא ממנו, נמצא שצורת התחתית היא פינה משולשת (תמונה 2).

הראשון, כנראה, שערך חקירה מדעית מדויקת של תחתית־התא בחלת־הדבש היה האסטרונום והגיאודז האיטלקי שחי בפאריס מאראלדי (Maraldi). בשנת 1712 מדד את זוית־הפינה המשולשת של קודקוד התא (α) ומצא שערכה הוא 110° בקירוב. יתר־על־כן הוא מצא שהזויות שיוצר כל מעוין של הפינה עם

פיאות המינסרה של גוף התא (β) שוות גם־הן לערך זה. לאחר מכן שאל מאראלדי את עצמו, עבור איזו זוית תהיה הזוית α שווה בדיוק לזוית β. הוא מצא שהערך הוא 109°28′ ומכך הסיק שהדבורים פתרו את הבעיה הגיאומטרית שהזכרנו. חוקר הטבע הצרפתי, שעבד בשירותו של לואי ה־14, **ריאומיר** (R.A.F. de Reaumir, 1683—1717), המוכר לנו בזכות סולם־הטמפרטורה שלו, ניחש שהעיקרון שלפיו בונות הדבורים את החלה, הוא השימוש בכמות דונג מינימאלית לבנית נפח נתון, ועיקרון זה הוא המכתיב את הזוית.

תמונה 1: חלת־דבש בבניה. התאים למעלה מימין עמוקים־יותר.

הרמן וייל (H. Weyl, 1885—1955), אחד מגדולי המתמטיקאים של המאה ה־20, היה פרופסור באוניברסיטת גֶטינגן וב־1913 עבד תקופה קצרה יחד עם **איינשטיין** בציריך. וייל לא היה יהודי אולם בשנת 1933, אחרי הרחקת אנשי הסגל היהודים מאוניברסיטת גטינגן, עזב גם הוא עימם ומשנה זו ועד 1951 היה פרופסור באוניברסיטת פרינסטון, ארה"ב. בשנה זו פרש וחזר לציריך (לא לגרמניה). בסיפרו "סימטריה" שהופיע ב־1952 מספר וייל כי את הניחוש של ריאומיר אישר המתמטיקאי השוויצרי **קניג** (Samuel Koenig, 1712—1757). קניג סבר, בטעות, שהערך העיוני של מאראלדי הוא הזוית שזה האחרון מדד בפועל. אך התברר לו שהערך העיוני, המתבסס על עקרון המינימום, 109°26′, סוטה מהערך של מאראלדי ב־2′ בלבד. בהמשך נראה מדוע שתי הגישות צריכות לתת פיתרון אחד. הסטיה של קניג נבעה משגיאה בלוחות שבעזרתם חישב את ערכו של $\sqrt{2}$. שגיאה זו נתגלתה כעבור ארבע שנים בידי המתמטיקאי המפורסם **מקלורין** (Maclaurin, 1698—1746). אולם קניג הסיק מכך שהדבורה שוגה בשיעור שאינו עולה על 2′ בפיתרון בעית המינימום. דיוק כזה, לדבריו, הוא מעבר לכושרה של הגיאומטריה הקלאסית והוא מחיב שימוש בשיטות החשבון הדיפרנציאלי של **ניוטון ולייבניץ**. בזכות מאמרו בנושא זה נתקבל קניג כעמית נלווה באקדמיה למדעים בפאריס. את הדיון שנערך בעקבות התגלית באקדמיה סיכם **פונטֶנֶל** (Fontenelle) המזכיר הקבוע. הוא קבע שהדבורים אומנם לא ניחנו באינטליגנציה גיאומטרית, כשל ניוטון או לייבניץ, אך הסיק שבנקטן בשיטותיה של המתמטיקה הגבוהה ביותר הן נהנות מהַכְוָנה אלוהית.

מענין לציין, שרעיון דומה מובע בטכסט ערבי מן המאה י׳. שם אומרת נציגת הדבורים, בין השאר: "בתינו משושים... ובבנין בתינו, וצורות מעונותינו, יש השראות אלוהיות ומושכלות רוחניים, מכיון שהמתמטיקאים, נבצר מהם ליצור את... הצורות שלנו ואת משושי מעונותינו"[1].

הקורא המעוניין יוכל למצוא בסעיף הבא שיטה פשוטה לפיתרון בעיַת־המינימום, שעמדה בפני הדבורה.

בעיה של מינימום

נתונה המינסרה המשושה והנקודה M על צירה. אם דרך הנקודה M וצלעות המשולש AEC (המשוכלל בעליל), החסום במשושה, נעביר שלושה מישורים, הם יחתכו מהמינסרה שלוש פינות משולשות בצורה פירמידית. קל לראות שאת נפחה של הפירמידה LAEF שאנו "מפסידים" "נרוויח" באמצעות הפירמידה AEOM הנוספת לתא, וכך נשאר הנפח ללא שינוי. מעטפת התא בנויה עתה משלושה מעויָנים ושישה טרַפזים. אך התא פתוח בתחתיתו. מהו שטח פני המעטפת? אם a הוא אורכה של צלע המשושה, b — הגובה AA, X — הוא "תוספת־הגובה" — OM, אפשר לקבל בעזרת משפט פיתאגוראס:

$$MK = \sqrt{MO^2 + OK^2} = \sqrt{x^2 + (a/2)^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{4x^2 + a^2}$$

$$AC = a\sqrt{3} \qquad MN = 2MK$$

שטח המעוין, השווה למחצית מכפלת האלכסונים

$$S_{AMCN} = \tfrac{1}{2}AC \cdot MN = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3}\cdot\sqrt{4x^2 + a^2} = \tfrac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$$

שטח הטרפז

$$S_{AA'B'N} = \frac{AA' + B'N}{2}\cdot a = \frac{b + (b - x)}{2}\cdot a = \frac{2b - x}{2}\cdot a$$

ומכאן שטח המעטפת

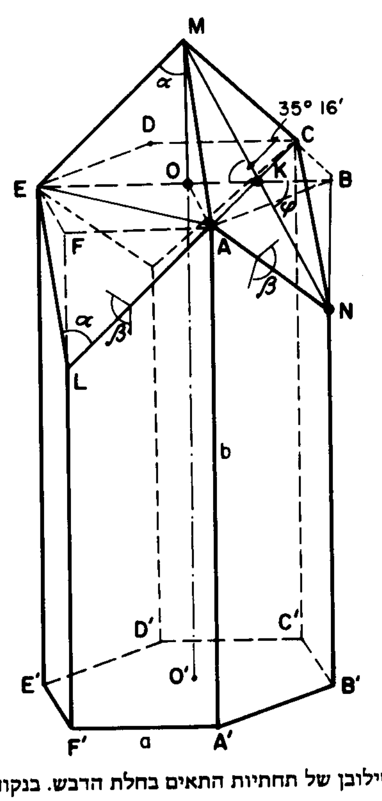
$$S = 6\cdot S_{AA'NB'} + 3\cdot S_{AMCN} = 6\frac{2b - x}{2}a + 3\cdot\tfrac{1}{2}a\sqrt{3a^2 + 12x^2}$$

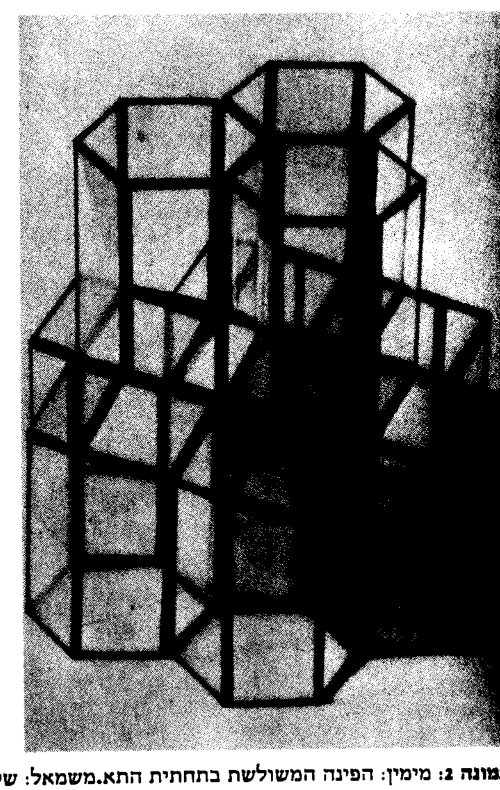
$$S = 3a\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} - x + 2b\right] \quad (1)$$

מהו ערכו של x שעבורו שטח המעטפת יהיה מינימאלי? הואיל ו־a ו־b קבועים, די לחקור מתי תהיה מינימאלית הפונקציה

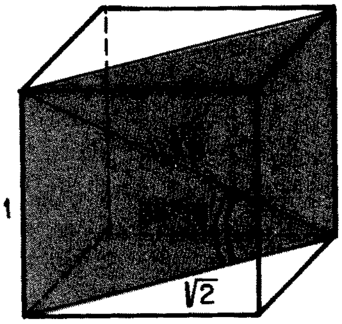
$$y = \tfrac{1}{2}\sqrt{3a^2 + 12x^2} - x \quad (2)$$

1) "איגרות האחים הנאמנים", הוצאת קהיר, כרך ב' עמ' 253. יתכן שמשפט זה, שאינו מופיע בתרגום העברי של האיגרת, הוא המקור למובאה מ"אלף לילה ולילה" שבתחילת המאמר. תודת המחבר נתונה לפרופ' שלמה פינס, שהעיר את תשומת ליבו לכך.





תמונה 2: מימין: הפינה המשולשת בתחתית התא. משמאל: שילובן של תחתיות התאים בחלת הדבש. בנקודות מסומנות נפגשים 4 תאים ובאחרות 6 תאים.



תמונה 3: חתך אלכסוני בקוביה.

אם נמצא את ה־x הממלא דרישה זו נוכל אחר־כך למצוא את הזויות השונות של התא שבנינו.

לשם מציאת מאכסימום ומינימום של פונקציה נהוג, בדרך־כלל, להשתמש בנגזרת — המושג היסודי של החשבון הדיפרנציאלי. לשולטים בשיטות אלה יקל לפתור את הבעיה בעצמם. במאמר זה ניתקל בכמה בעיות מסוג זה ואנו ננסה לפותרן בשיטות אלמנטאריות, מבלי להשתמש במושג הנגזרת. אנו מקוים שיש ענין בשיטות עצמן, ואף למי שבקיא בחשבון הדיפרנציאלי.

תחילה נשתחרר מהשורש במשואה (2) ונציג אותה כמשוואה ריבועית ב־x, נקבל:

$$2(x+y) = \sqrt{3a^2+12x^2} \rightarrow \qquad (3)$$

$$8x^2 - 8xy + (3a^2-4y^2) = 0$$

הואיל וקים x חיובי, הפותר משואה זו, דרוש שהדיסקרימיננטה שלה תהיה אי־שלילית

$$D = (8y)^2 - 4\cdot 8\cdot(3a^2-4y^2) \geqslant 0$$

ומכאן

$$y^2 \geqslant \frac{a^2}{2}$$

a ו־y חיוביים ולכן $y \geqslant a/\sqrt{2}$, ולכן הערך המינימאלי ש־y יכול לקבל הוא $y_{min} = a/\sqrt{2}$.
מצאנו את ערכה המינימאלי של הפונקציה ועתה נמצא איזהו ה־X המקים ערך זה. הצבה במשואה (3) נותנת:

$$x^2 - \frac{xa}{\sqrt{2}} + \frac{a^2}{8} = 0$$

ביטוי זה הוא ריבוע שלם, שפיתרונו היחיד

$$x = \frac{a}{2\sqrt{2}} \approx 0.35a$$

עבור ערך זה של X יהיה שטחה של מעטפת התא מינימאלי. עתה ניתן לחשב זויות שונות בתא. כך למשל טַנגנס הזוית MKO השוה MO/OK הוא

$$tg\varphi = \frac{a}{2\sqrt{2}} / \frac{a}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

והזוית $\varphi = M\hat{K}O = 35°16'$ בקירוב.

ואילו הזוית $E\hat{M}A = A\hat{M}C = C\hat{M}E = 109°28'$ כפי שניחש ריאומיר.

הכמות, בחומר־בנין, שחוסכת הדבורה בבנותה את תאיה בעלי תחתית של פינה משולשת, בזוית שמצאנו, לעומת תאים בעלי קרקעית מישורית, הוא בשיעור של 2% בקירוב. ליתר־דיוק, לכל 54 תאים שהיא בונה, לפי תוכנית זו, היא יכולה לבנות עוד תא אחד מהחומר "הנחסך".

מעניינות הן גם הפרופורציות של המשולש, המיטבי MOK.

$MO:OK:MK = 1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$.

הקורא הסקרן יכול לבדוק ולמצוא שבאותן פרופורציות אנו רואים חתך אלכסוני של קוביה (תמונה 3), ובכן לא הכל מסובך כל כך.

והפעם שאלה של מאכסימום

תכונת האופטימאליות של הזוית בת 109°28' ידועה לא־רק בטבע. נביא לכך עוד דוגמות אחדות.

מקור־אור נמצא מעל מרכזו של שולחן עגול, שרדיוסו R. באיזה גובה מעל לשולחן יש להציב את המקור, כך שעוצמת ההארה בהקפו של השולחן תהיה מאכסימלית (תמונה 4)? מתורת האור ידוע שעוצמת ההארה בנקודה מסוימת:

$$I = K\frac{\sin\alpha}{L^2}$$

K — הוא מקדם קבוע, התלוי בפיסיקה של המערכת. L — המרחק ממקור־האור לנקודת־ההארה, α — הזוית בין קרן־האור למישור־השולחן. ברור שהעוצמה I תגדל, ככל שהזוית α קרובה יותר לזוית ישרה, מצד אחד, וככל שיקטן המרחק L מהצד האחר. אולם קל להיוכח ש־α ו־L תלויים זה בזה, מפני ש־R קבוע.

$$L = \frac{R}{\cos\alpha}$$

תלותה של עוצמת ההארה I במישתנה היחיד α תהיה איפוא בתנאים אלה

$$I(\alpha) = \frac{K}{R^2}\sin\alpha\cos^2\alpha = \frac{K}{R^2}y(\alpha)$$

די איפוא למצוא עבור איזו זוית α תהיה הפונקציה y(α) מאכסימלית. גם בעיה זו נפתור בדרך אלמנטארית, ללא שימוש בנגזרת. תחום הזויות המשמעותי ל־α הוא מ־0°—90°. בתחום זה הפונקציה y(α) חיובית ומשום־כך, אם קימת α כך שהפונקציה מאכסימלית, תהיה גם הפונקציה

$$Z = y^2 = \sin^2\alpha\cos^4\alpha$$

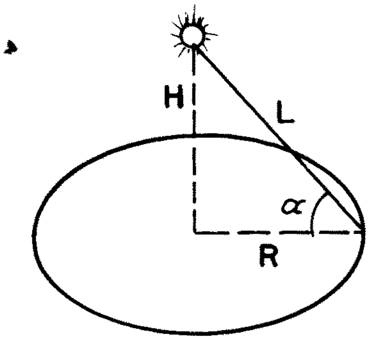
(וכך גם הפונקציה W=2Z) מאכסימלית באותה α. די איפוא למצוא היכן מקבלת הפונקציה

$$W = 2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$$

את ערכה המאכסימלי. מה תכליתו של פירוק מוזר זה? מסתבר כי סכומם של הגורמים בו הוא מיספר קבוע.

$$2\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha =$$

$$2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 2$$



תמונה 4: באיזה גובה, מעל שולחן עגול יש להציב מנורה כך שעוצמת ההארה בהקפו של השולחן תהיה מַכסימלית?

בתורת אי־השויונים ידוע כי אם שָׁוֶה סכום של n גורמים חיוביים למיספר קבוע תהיה מכפלתם מאכסימלית כאשר כולם שָׁוִים (ראה קטע במסגרת).

עבור שני מישתנים דן המשפט בתכונותיו האופטימאליות של הריבוע. מכל המלבנים בעלי הקף נתון, יהיה לריבוע השטח המאכסימלי.

אי־שיוויון קלאסי

במקרה הכללי משפט זה נובע מיד מאי־השויון הקלאסי של הממוצע החשבוני והממוצע ההנדסי

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n} \leqslant \frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}$$

מכאן

$$x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n \leqslant \left(\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}\right)^n$$

ואם הסכום קבוע גם המכפלה מוגבלת וסביר שערכה המאכסימלי יתקבל במצב של שיוון, אולם זה מושג כאשר הגורמים שוים זה לזה. למשפט יסודי זה הוכחות רבות. מחוסר מקום נביא אחת הפשוטות שבהן. הוא נובע מִיָדית מהמשפט הבא: אם מכפלת n מיספרים חיוביים שוה ל־1, סכומם אינו נופל מ־n:

$$a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n = 1$$

אזי

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geqslant n$$

שיוון קים במיקרה שכל הגורמים שוים ל־1.

את המשפט מוכיחים באינדוקציה מתמטית, והוא תרגיל שכיח בבחינות הבגרות. עבור n=2 הוא טוען שסכום שני מיספרים הופכיים חיוביים אינו קטן מ־2.

$$K+\frac{1}{k} \geqslant 2$$

נסמן

$$G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

$$G^n = x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n$$

$$1 = \frac{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}{G^n} = \frac{x_1}{G}\cdot\frac{x_2}{G}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{G}$$

וכאן אנו מצויים בתנאי המשפט הקודם, שכן סכום הגורמים

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{G} = \frac{x_1}{G}+\frac{x_2}{G}+\ldots+\frac{x_n}{G} \geqslant n$$

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} \geqslant G = \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}$$

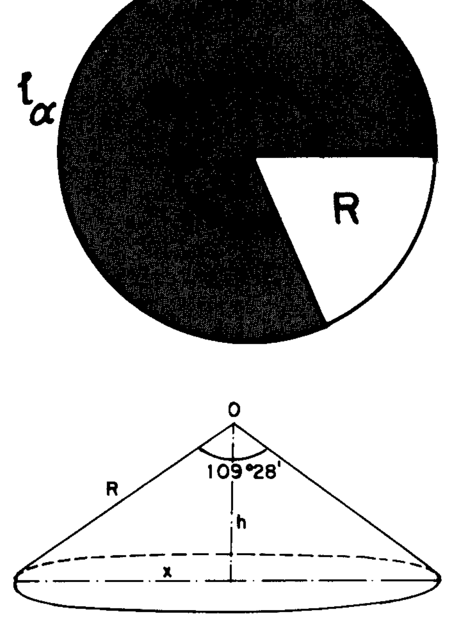
ראינו כי אכן סכום הגורמים בפונקציה W קבוע והיא עצמה תהיה לכן מאכסימלית כשגורמיה שוים, כלומר כאשר

$$2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha = \cos^2\alpha$$

או כאשר

$$tg^2\alpha = ½ \qquad tg\alpha = 1/\sqrt{2} \qquad \alpha = 35°16'$$

גם עוצמת ההארה I תהיה מאכסימלית עבור אותה זוית α. זוית הראש של חרוט־האור הנופל על השולחן אינה אחרת אלא 109°28', המוכרת לנו מכבר.



תמונה 5: מהי הזוית α של גיזרה בעלת רדיוס נתון (למעלה) הנותנת חרוט בעל נפח מַכסימלי (למטה)?

כיצד בונים חרוט

ידוע שלא ניתן לקפל עיגול של נייר על מנת לקבל חרוט. אולם הדבר אפשרי בגיזרה. נשאלת השאלה מהי זוית הגיזרה α בעלת רדיוס נתון R, שתיתן חרוט בעל נפח מכסימלי? (ראה תמונה 5א'). הקף הגיזרה בעלת הזוית α:

$l\alpha = R\alpha$ (α ברדיאנים).

(נזכור שאם $\alpha = 2\pi$ ההקף $2\pi R$ הוא הקף המעגל). לאחר הקיפול ההקף שחישבנו הוא הקף הבסיס של החרוט ורדיוס הגיזרה הוא הקו היוצר שלו. אם רדיוס הבסיס הזה x (תמונה 5ב') מתקיים השיוויון $2\pi x = R\alpha$

$$x = \frac{R\alpha}{2\pi}$$

גובה החרוט

$h = \sqrt{R^2 - x^2}$ לפי משפט פיתגורס

$$h = \sqrt{R^2 - \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

נפחו של החרוט, השווה לשליש מכפלת שטח-הבסיס בגובה, שוה

$$V = 1/3\pi x^2 h =$$

$$1/3\pi \frac{R^2\alpha^2}{4\pi^2}\cdot\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}$$

$$\frac{R^3}{24\pi^2}\sqrt{\alpha^4(4\pi^2 - \alpha^2)}$$

כפי שראינו בדוגמת השולחן המואר די לחקור עבור איזו זוית α יהיה הביטוי שבתוך השורש מכסימלי. גם זאת נעשה בדרך אלמנטארית.

$$y = \alpha^4(4\pi^2 - \alpha^2) = \alpha^2\cdot\alpha^2\cdot(4\pi - \alpha^2)$$

הפונקציה

$$Z = 2y = \alpha^2\cdot\alpha^2\cdot(8\pi - 2\alpha^2)$$

מורכבת משלושה גורמים שסכומם:

$\alpha^2 + \alpha^2 + 8\pi^2 - 2\alpha^2 = 8\pi^2 =$ קבוע

הוא גודל קבוע, שאינו תלוי בזוית הגיזרה. כפי שהוכחנו כבר (במיסגרת) הפונקציה z, ולכן y, ולכן גם נפח החרוט, יהיו מאכסימליים כאשר כל הגורמים שוים, כלומר כאשר

$$\alpha^2 = \alpha^2 = 8\pi^2 - 2\alpha^2$$

למזלנו שנַים מהגורמים שוים בין כה וכה. שויון יתקַים כאשר

$$\alpha = 2\pi\sqrt{2/3} \approx 293°56'$$

ובכן מה? ישאל הקורא הנבוך. תשובה: טול את הגיזרה שקיבלת; קפל אותה לחרוט ומדוד את זוית-הראש שלו. כמובן — 109°28'.

אלה מבין קוראינו הזוכרים את לימודי הכימיה, יזכרו בודאי גם שלאטום הפחמן ביהלום 4 קשרים לשכנים קרובים; אלה מכוּונים לקודקודי טֶטרַהֶדר, וכך גם בתרכובות פחמן רבות (תמונה 6). הזוית בין כיווניהם של שני קשרים אלה היא — בודאי ניחשתם — 109°28'.

כשם שמעניינת הזוית 109°28' עצמה, חשובות גם זויות הקשורות בה, למשל הזוית המשלימה ל-180° — 70°32' ומחציתה 35°16' וכן 54°44' (המשלימה את הקודמת ל-90°). בכל בעיה שניתקל באחת מזויות אלו נדע מיד ששוב נתקלנו בזוית הקסם, שהיא נושא מאמרנו. לזויות אחרונות אלה חשיבות לחובבי קָלֵידוסקופים. **קלידוסקופ** הוא, כזכור, השפופרת שבה פיסות זכוכית צבעוניות יוצרות דגמים מרהיבים. בקלידוסקופ הטֶטרַהֶדרי הזוית בין **פיאות** הטטרהדר היא בת 70°32', וזו שבין **פיאות** האוקטהדר בקלידוסקופ האוקטהדרי 109°28' אולם על כך נכתבו כבר ספרים שלמים.

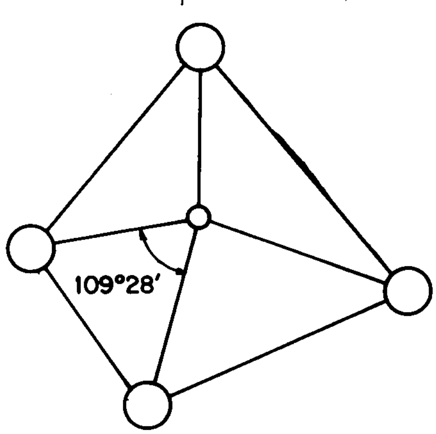
החרוט האופטימלי במתמטיקה

כבר בפרק הראשון, בדוננו בקרקעית התא של הדבורה, מצאנו שהזוית בת 109°28' מאפשרת חיסכון מַרבּי. שם מצאנו שלפינה הבנויה בזוית זו דרושה כמות מינימאלית של חומר.

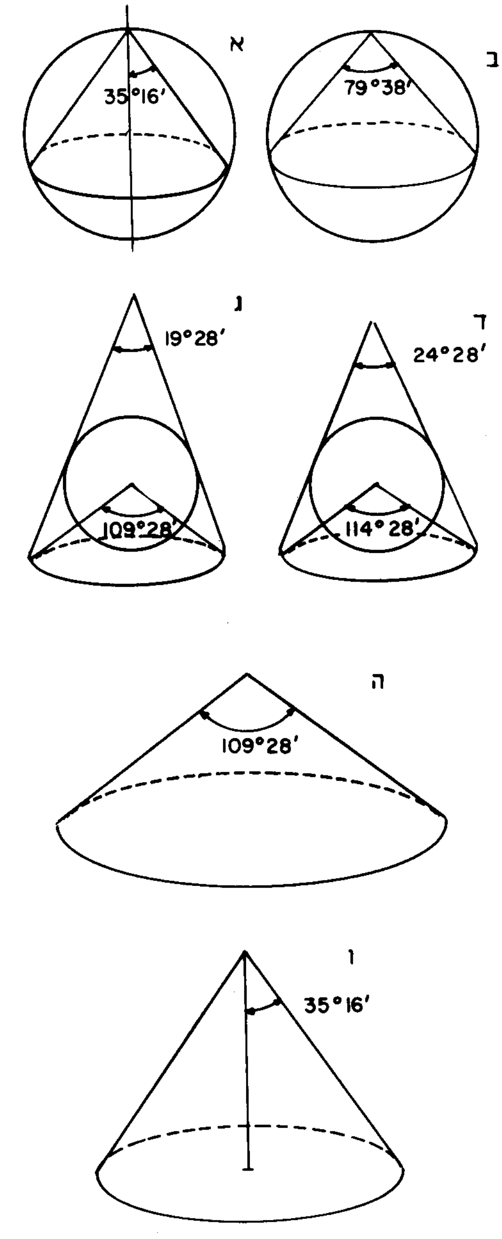
להלן עוד בעיות אחדות של מכסימום ומינימום, חלקן בעיות קלאסיות, הנפתרות במסגרת קורס בסיסי בחשבון דיפרנציאלי.

★ מהו החרוט, בעל הנפח המכסימאלי החסום בכדור נתון?

★ מהו החרוט — בעל שטח מעטפת מכסימאלי, החסום בכדור נתון?



תמונה 6: מיבנה טֶטרַהֶדרי, האופיָני לתרכובות פחמן רבות.



תמונה 7: (א) החרוט בעל נפח, ומעטפת, מַכסימליים החסום בכדור נתון.
(ב) החרוט בעל שטח הפנים המַכסימלי החסום בכדור נתון.
(ג החרוט בעל נפח מינימָלי החוסם כדור נתון.
(ד) החרוט בעל מעטפת מינימָלית החוסם כדור נתון.
(ה) החרוט בעל קו יוצר נתון ונפח מַכסימָלי.
(ו) החרוט בעל נפח קבוע למעטפת מינימָלית.

★ כנ"ל, אבל הפעם שטח הפנים (מעטפת + בסיס) מכסימלי.

★ מהו החרוט, בעל הנפח (או המעטפת, או שטח הפנים) המינימאליים החוסמים כדור נתון?

★ לאיזה מבין החרוטים בעלי הנפח הקבוע מעטפת או שטח-פנים מינימאליים? פיתרון בעיה זו מאפשר בנִיַת אוהל חרוטי, עם או בלי רצפה, בכמות מינימאלית של בד.

★ למי מבין החרוטים בעלי קו יוצר נתון מכסימאלי, החסום בכדור נתון?

(המשך בעמ' 192)

זוית הקסם

(המשך מעמ' 177)

* הבעיה המקבילה לגבי המעטפת המכסימלית, או המינימלית, היא טריויאלית; הקורא יכול להשיב על כך בעצמו.

אין ליחס לזוית שלנו משמעות מיסטית מוגזמת (ר' למשל תמונות 7ב', 7ד'). לא בכל הבעיות שהצגנו מופיעה היא, או אחת מקרובותיה, שהיצגנו. למשל בחרוט בעל שטח־פנים מכסימלי, החסום בכדור נתון, זוית־הראש היא בת ′79°38. הקורא עשוי לסבור כי עובדה זו נובעת מקיומו של הבסיס בבעיה; אולם בבעיה המקבילה, של חרוט בעל שטח־פנים מינימאלי, החוסם כדור נתון, הזוית מופיעה אל־נכון (ראה תמונה 7 שבה מוצגים גם שאר הפיתרונות). יתר־על־כן לשתי הבעיות הראשונות פיתרון אחד. בבעיה המקבילה של גליל חסום, למשל, אין פיתרון משותף לבעית הנפח והמעטפת. את כל הבעיות שהצגנו, ללא יוצא־מן־הכלל, ניתן לפתור בשיטות אלמנטריות וללא שימוש בנגזרת. הן דומות בְּכּוֹל לאלה שנקטנו, להוציא את הבעיות של שטח־הפנים, וגם שם קַימות שיטות דומות.

נקוֶה שהקורא קיבל לא־רק מידע על זוית אחת מופלאה, אלא גם למד שיטה לפיתרון אלמנטרי של בעיות מינימום ומכסימום. הקורא המתענין יוכל בודאי למצוא עוד בעיות, מהטבע או מתמטיות טהורות, שבהן מופיעה זוית־הקסם — ′109°28. נשמח לשמוע עליהן.

לקריאה נוספת

Thompson D.W. 1956. On Growth and Form. Cambridge Un. Press (מהדורה ראשונה 1917)