# קרומי סבון

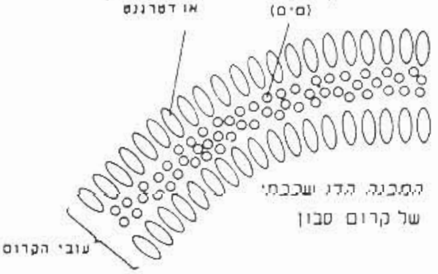
מאת זאב לוז

כולנו מודעים ליופיָם של קרומי־סבון. בקרומים אלה מתגלות גם תופעות־טבע מענינות, הקשורות באנרגית שטח־הפָּנים ובתכונות האור, והם משמשים מודלים לפיתרון בעיות רבות במתמטיקה ובהנדסה.

**זאב לוז** (Z. Luz) **נולד בגרמניה בשנת 1932 ועלה לארץ בגיל שנתַיים. בוגר התיכון־החקלאי בפרדס חנה, למד באוניברסיטה העברית בירושלים ובמכון ויצמן ברחובות, והשתלם במעבדות בֶּל בארה"ב, באוניברסי־טת אוכספורד באנגליה ובאוניברסיטה של קָליפורניה בברקלי. מכהן כפרופסור לכימיה במחלקה לחקר האיזוטופים ודיקן הפקולטה לכימיה במכון ויצמן למדע. עוסק בחקר שימושים כימיים של תהודה מגנטית. המאמר הנוכחי הוא עיבוד הרצאה שניתנה בשנת תשמ"א במסגרת טקס חלוקת פרסים לזכרם של מורי ביה"ס התיכון־החקלאי בפרדס־חנה.**

מישחקי הצבעים המשתקפים בקרומי סבון וצורותיהן הגיאומטריות של בועות־הסבון מעורֵרים לא רק התפעלות מיופיָם הנדיר, אלא אף את סקרנותם של אומנים, ארדיכלים, וכן — אנשי מדעי־הטבע והמדעים המדוּיָקים. הארדיכל אוטו (Frei Otto) תִיכנן ובנה מִיבנים רבים, לרבות מִיבני־תערוּכות, המבוססים על צורותיהם של קרוּמי־סבון. החוקרים ניוטון (.I. Newton) ו־אוֹילֶר (L. Euler) פיתחו תיאוריות מיוחדות לשם חישוב צורות הקרומים. יישוּם תיאוריות אלו הוא היום אתגר למתימטיקאים. קרומים הנפרָשׂים בין סריגים יכולים לשמש פיתרון לבעיות מתימטיות ופיסיקָליות, שלכאורה אינן קשורות כלל לקרומים.

מחקר התכונות של קרומי הסבון הביא במשך השנים לפירסומם של מאות ספרים ומאמרים, והשימוש בקרומי־סבון, להדגמה ולהוראה, עתיק־יומין לא פחות מהמחקר העיוּני. מפורסם במיוחד הוא ספרו של בּוֹיס (C. V. Boys) המבוסס על סידרת הרצאות שנשא בפני החברה המלכותית הבריטית בסוף 1889 ותחילת 1890. בשנים האחרונות התחדש העניָן בקרומי הסבון, בעיקר לצרכי הוראה והדגמה.

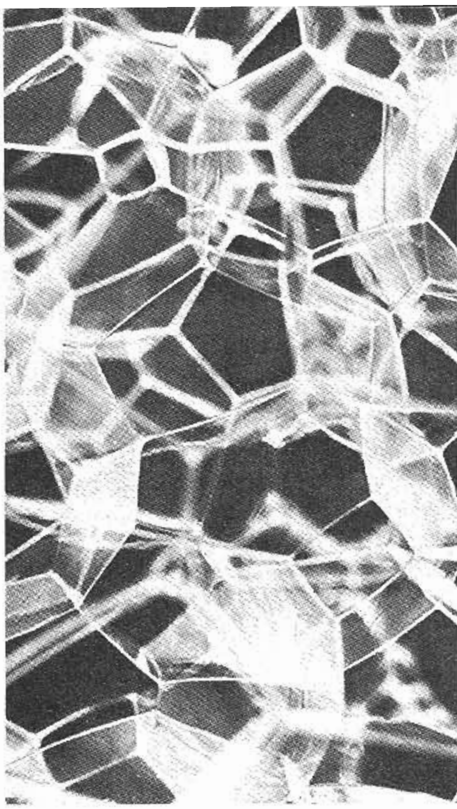



**תמונה 1**: מיבנה של קרום סבון

## קרום ומֵי־סבון

נתאר את צוּרות הקרומים הנוצרים כאשר טוב־לים מודלים בתמיסות מי־סַבּוֹן או דֶטֶרגֶנטים אחרים ונִבחָן את הקשר בין צורות אלו לפיתרון בעיות מתמטיות פיסיקָליות.

הקרומים בהם מדובר בנויים משכבות כפולות של מוֹלקוּלוֹת־סבּון או דֶטֶרגֶנט (תמונה 1), כאשר בין השכבות נמצאות מולקולות הממֵס (בדרך־כלל — מים). לשכבות אלו יש אנרגיה פנימית גבוהה, הנובעת ממצבן המיוחד של מולקולות בשטחי

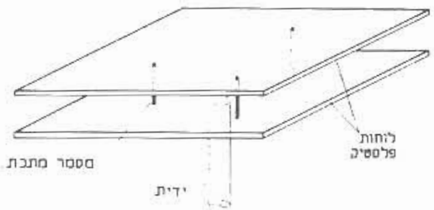


הפנים המפרידים בין תָוֶך אחד לשני. אנרגיה זו נקראת "אנרגיַת הפָּנים" או "אנרגית שטח הפנים".

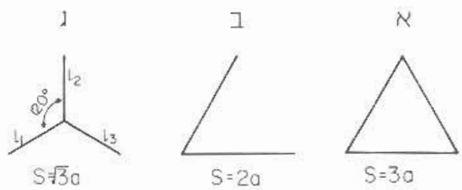
אנרגיַת הפנים של מים טהורים היא גדולה, עד כדי כך שאפשר להניח בזהירות סיכה עשׂוּיָה מתכת (שמישקלה הסגולי גדול פי כמה מזה של המים) על פני שטח המים מבלי שהסיכה תשקע. חַרְקֵי־מים מסוגלים לצעוד בביטחון על פני המים, בנצלם את מֶתח־הפָנים של המים. דטרגנטים וסבון הם חומרים "פעילי שטח" — הם מקטינים את מתח־הפָנים של המים באופן ניכר. טיפטוּף מעט חומרים פעילי־שטח יביא לשקיעה מהירה של הסיכה והחרק. ככל ששטח־הפָנים גדול יותר, כך גדולה יותר אנרגיַת הפָנים, ומכיוָן שכל מערכת פיסיקָלית נוטה למצב של אנרגיה מִזערית, ישנה נטיָה טבעית ליצירת גופים ששטח פניהם מיזערי (למשל — טיפת מים). למים עצמם מתח־פנים כה גדול עד שאי־אפשר לפרושׂ אותם לקרומים בגודל נוח למדידה והדגמה. סבון ודטרגנטים מקטינים את מתח הפנים כך שהקרומים הנוצרים, קרומי הסבון, יפים, גדולים ונוחים להצגה. אף שמתח הפנים שלהם נמוך יותר מִשֶל מים טהורים, כפופים כמובן גם קרומי הסבון לעקרון הקטנת השטח עד לערך מִזערי. הקרומים הנוצרים צריכים להִישען על המסגרת או הסריג הנתונים, ואלה אמנם מכתיבים את צורתם הסופית של הקרומים.

## אורך מיזערי

הבה נבחן את התנהגותם של קרומי סבון ב"כרי־כי פלַסטיק", הבנויים משני לוחות פלֶכּסיגלָס (פֶּרספֶּכּס) המחוברים ביניהם על ידי שני מסמרים או יותר (תמונה 2). כאשר טובלים כריכים אלה בתמיסת־סבון נוצרים בהם קרומים הקשורים למסמרים. אם רוחב הכריכים קבוּע נוצרים קרומים שאורכם הכללי מיזערי. ברור לכן שבכריך בעל שני מסמרים ייוָצר קרום המחַבּר את שני המסמרים לאורך קו ישר. אולם מהו הקרום הקצר ביותר בכריך הכולל שלושה מסמרים בקודקדי

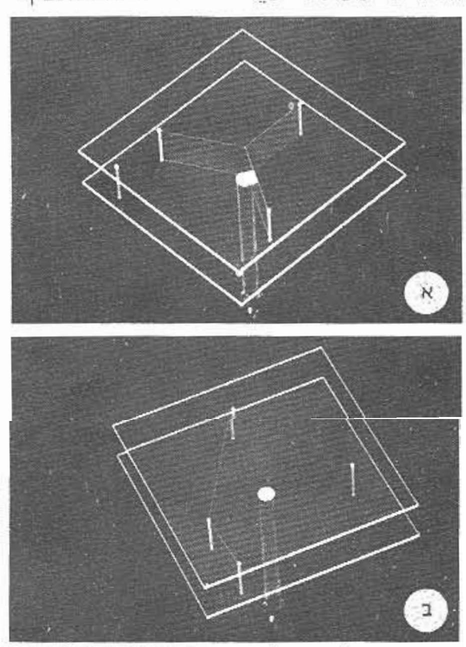



**תמונה 2:** כריך המשמש לניסויים בקרומי־סבון.




**תמונה 3:** פיתרונות אפשריים לבעיַת האורך המיזערי עבור שלוש נקודות בקודקודי משולש שוה־צלעות. אורך צלעות המשולש הוא a ואורך הקרום המחושב S. הפיתרון המיטבי הוא ג'.

משולש שוֵה־צלעות? בתמונה 3 מתוארות שלוש אפשרויות. (א) — שלושה קטעים המחברים את קודקודי המשולש. ברור שאין זה הפיתרון המבוקש, שכן גם אפשרות (ב) מקַיֶמת את התנאי, שכל הקודקודים קשורים ביניהם (אם־כי לא באופן ישיר) ומובן שפיתרון זה עדיף על פיתרון (א). אולם האם זהו הפיתרון בעל אורך הקטעים הקצר ביותר? תשובה לכך נוכל לקבל באופן נסיוני, על־ידי טבילת כריך בעל שלושה מסמרים, **היוצרים משולש שוֵה־צלעות**, בתמיסת־סבון.




**תמונה 4:** תצלומים של קרומי־סבון הנוצרים בכריכים בעלי שלושה מסמרים.

(א) — המסמרים נמצאים בקודקודי משולש שוה־צלעות.

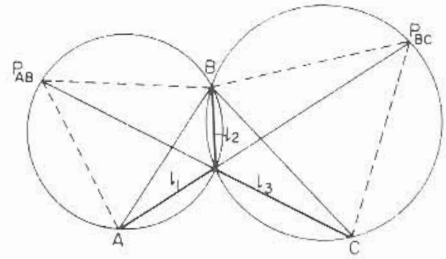
(ב) — המסמרים נמצאים בקודקודי משולש בעל זוית גדולה מ־120°.

תמונה זו, כיתר התמונות במאמר, צולמה על־ידי מר **שמואל אנגלשטיין** מהמעבדה לצילום של מכון ויצמן למדע, והמחבר מודה לו על כך.

תוצאת הניסוי נראית בתמונה 4א' ומשורטטת בתמונה 3ג'. נוצרת מערכת של שלושה קרומים, הנפגשים במרכז המשולש. הסכום $l_1 + l_2 + l_3$ הוא לכן האורך הכללי המיזערי המחַבר את שלושת קודקודי המשולש.

## הקו הקצר: פֶּרִיס — מוֹסקְוָה

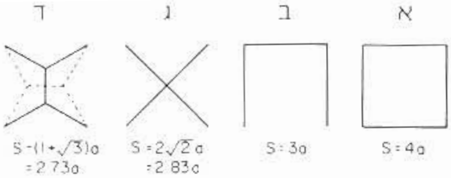
עבור משולש שְוֵה־צלעות קל למצוא את נקודת־הצומת, שבה נפגשים שלושת הקטעים — היא מרכז המשולש. אולם עבור משולש כללי הבעיה מורכבת־יותר. שיטה אחת, המיוחסת לנַפּוליון בּוֹנַפּרטה — שהיה גיאומטריקן־חובב — מתוארת בתמונה 5: על שתַיִם מתוך שלוש הצלעות של המשולש הנתון בונים משולשים שוֵי־צלעות (מקוּוקָוים) הפונים אל מחוץ למשולש הנתון. מחברים את הקודקודים החפשיים של המשולשים, המקוּוקָוים עם הקודקודים המרוחקים, שבמשולש הנתון (קַוים $CP_{AB}$ ו־$AP_{BC}$), בהתאמה. נקודת־החיתוך של קוִים אלה היא נקודת הצומת של אורכי הקטעים המיזעריים. אפשר להוכיח שנקודת־הצומת היא גם נקודת־החיתוך של המעגלים החוסמים את המשולשים המקוּוקָוים, וכן




**תמונה 5:** "שיטת נפוליון", למציאת נקודת הצומת עבור נקודות. הקוים השלמים מחברים את שלוש הנקודות A, B ו־C. על שתַיִם מצלעות המשולש CBA בונים משולשים שוֵי־צלעות חיצוניים (קטעים מקווקוים). מחברים את הקודקודים החופשיים ($P_{AB}$ ו־$P_{BC}$) של משולשים אלה עם הנקודות הנגדיות C ו־A. נקודת־החיתוך של שני קוים אלה היא נקודת־הצומת, והקטעים המסומנים $l_1$ $l_2$ ו־$l_3$ הם הפיתרון המבוקש.

— שהזָוית בין הקטעים, בנקודת־הצומת, תהיה תמיד 120°. כפי שנראה להלן זוהי תוצאה כללית עבור הצמתים המתקבלים בבעיַת האורכים המיזעריים שבין נקודות המישור. ברור לכן שבמשולש, שאחת מזָויותיו שָוָה או גדולה מ־120° לא ייוָצר צומת, אלא קרום רציף הבנוי משני קטעים הנשענים על צלעותיו הקצרות של המשולש (תמונה 4ב').

ברור שאורכו המיזערי של הקרום, המחַבר ארבעה מסמרים הנמצאים בקודקודים של ריבוע, איננו זה המוצג בתמונה 6א', שכן שלושת הקטעים שבתמונה 6ב' וכן הצלב הבנוי משני האלכסונים (6ג') אורכם קצר יותר והם קושרים בין כל קודקודי הריבוע. מתברר שהפיתרון המיטבי הוא בעל צורה שונה לחלוטין, כפי שאפשר להוָכח מתמונה 7 והחישוב ב־6ד'. **אנו רואים שנוצרו שני צמתים**, שכל אחד מהם מהוֶה מִפגש של שלושה קרומים וביניהם זויות של 120°. קל להיוָכח שהאורך הכללי של הקטעים במערכת זו הוא $(1+\sqrt{3}) = 2.73$ פעמים אורך צלע הריבוע




**תמונה 6:** פיתרונות אפשריים עבור ארבעת קודקודיו של ריבוע שצלעו a. ב־ד' מתוארים שני פיתרונות מיטביים זהים (קו מלא וקו מקווקו).

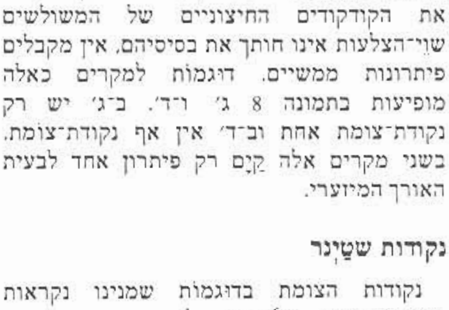
והוא קטן ב־3.6% מאורך הקטעים שבתמונה 6ג'.

את הפיתרון לאורך מיזערי, עבור מערכת כללית של ארבע נקודות במישור, אפשר לקבל על ידי הרחבה של "שיטת נפוליון" (תמונה 8א'). על הקטע AB בונים משולש (חיצוני) שוֵה־צלעות ומשַרטטים את המעגל החוסם. באותו אופן בונים על הקטע CD משולש שוֵה־צלעות ומעגל חוסם. מחברים את הקדקדים החופשים $P_{AB}$ ו־$P_{CD}$ ומקבלים שתי נקודות־חיתוך עם המעגלים החוסמים. נקודות אלו הן נקודות־הצומת המבוקשות. אפשר היה לבחור בקטעים BC ו־AD כדי לבנות את המשולשים ואת המעגלים החוסמים ואז היתה מתקבלת התוצאה שבתמונה 8ב'. שתי האפשרויות מהַוות פיתרון וכל פיתרון הוא בבחינת "מינימום מקומי". מי מהם הוא המינימום המוחלט — כלומר, המצב היציב ביותר, ומי הוא מצב מֶטָה־סטַבּילי, פחות יציב — זאת ניתן לקבוע רק במדידה ישירה. במקרה הנוכחי קל לראות שהפיתרון 8א' "טוב־יותר" מאשר 8ב'. במקרה של ריבוע (תמונות 6ד', 7) שני הפיתרונות זהים זה לזה (קו מלא, קו מרוסק, בתמונה 6ד') ואנו מכנים אותם "מנוונים". במקרה זה גרמה הסימטריה לניוון.

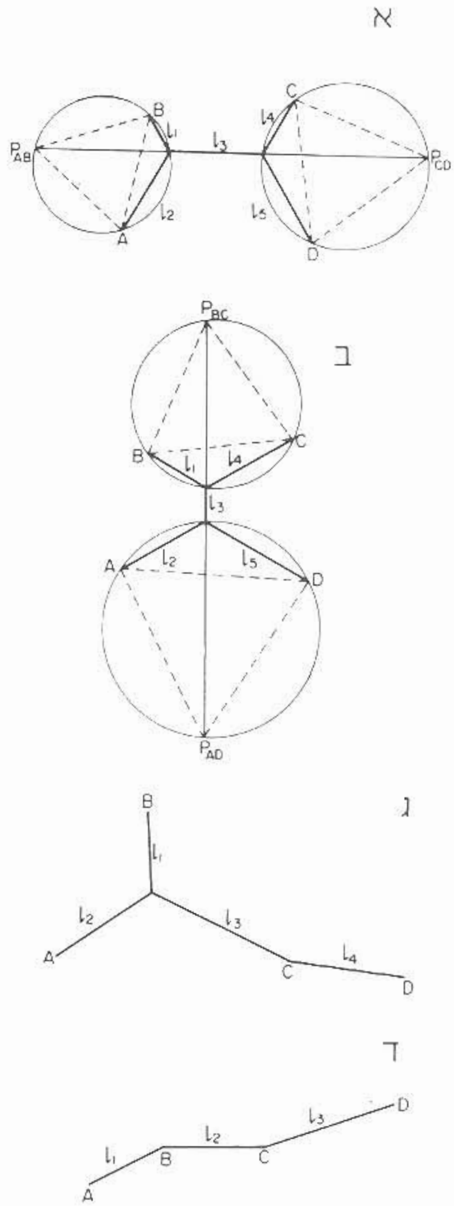
לא תמיד ניתן לציֵר נקודות־צומת, כמודגם בתמונה 8א' ו־ב'. כך, למשל, כאשר המעגלים החוסמים חותכים זה את זה, או כאשר הקו המחבר את הקודקודים החיצוניים של המשולשים שוֵי־הצלעות אינו חותך את בסיסיהם, אין מקבלים פיתרונות ממשיים. דוגמות למקרים כאלה מופיעות בתמונה 8 ג' ו־ד'. ב־ג' יש רק נקודת־צומת אחת וב־ד' אין אף נקודת־צומת. בשני מקרים אלה קַיָם רק פיתרון אחד לבעית האורך המיזערי.

## נקודות שטַיְנר

נקודות הצומת בדוגמות שמנינו נקראות נקודות־**שטַיְנר**, על־שמו של מתימטיקאי שוויצי (Jacobus Steiner) שחי במאה התשע־עשרה



**תמונה 7:** קרום־סבון שנוצר בכריך בעל ארבעה מסמרים, הנמצאים בקודקודיו של ריבוע.




**תמונה 8:** האורכים המיזעריים במערכות בעלות ארבע נקודות. (א) ו־(ב) — מציאת שני הפיתרונות עבור מערכת בעלת שתי נקודות שטַינר. (ג) — מערכת עם נקודת שטַינר אחת. (ד) — מערכת נקודות ללא נקודת־שטַינר.

והיה מגדולי הגיאומטראים בכל הדורות. עד היום אין פיתרון אנָליטי ל"בעיַת שטַינר", אולם שטַינר הוכיח מיספר חוקים כלליים הקשורים לבעיה. למשל: מיספר נקודות־הצומת במערכת בעלת n נקודות יכול לכל היותר להיות 2- n; וכן: הזָויוֹת בין הקטעים בנקודות־צומת הן תמיד $120^\circ$. ואמנם, ראינו בתמונה 8 שעבור 4 = n מיספר הצמתים יכול להיות 2, 1 או אפס.

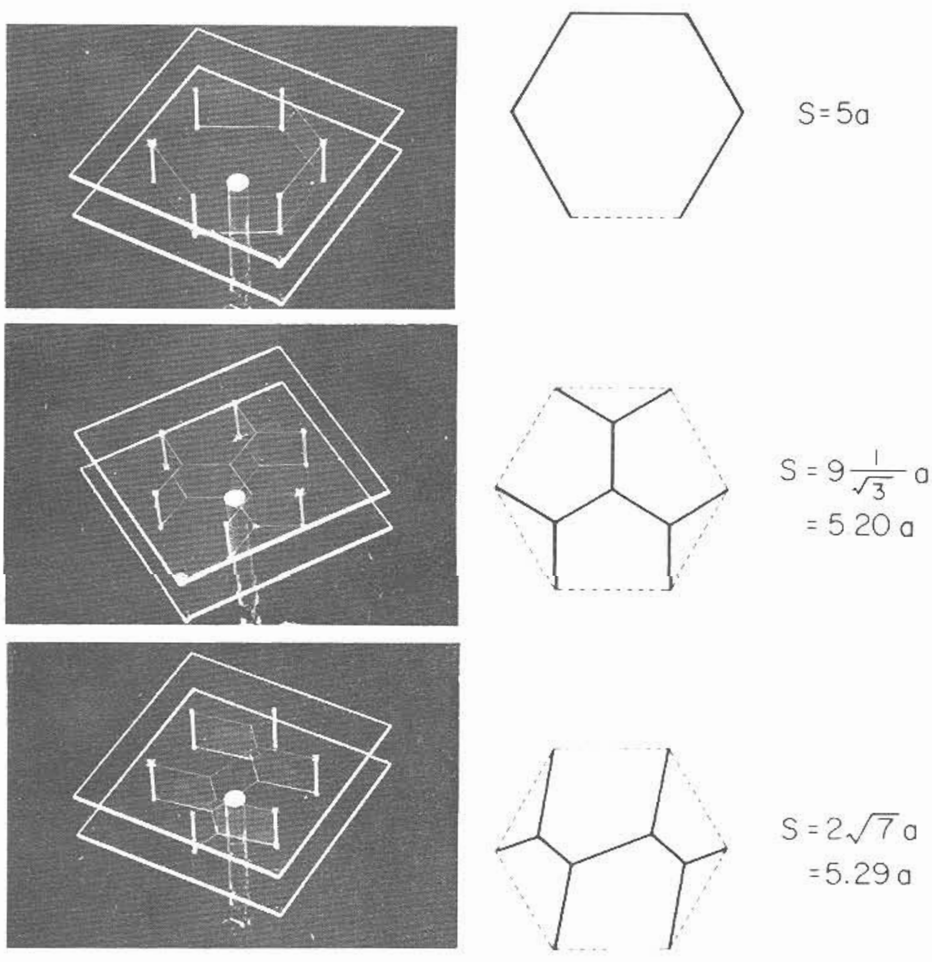
ככל שגדל מיספר הנקודות (n) כן גדל מיספר הפיתרונות האפשריים, כלומר, מיספר המצבים בעלי מינימום מקומי. עבור ששת קודקודיו של משושֶה שוֵה־צלעות קיָמים שלושה פיתרונות שונים (תמונה 9). הפיתרון המוצג בתיכנון (סכימה) העליון הוא למעשה אחד משישה פיתרונות מנוּוָנים (הקטע הפתוח יכול להימצא בשישה מקומות שונים), זה שבתיכנון האמצעי הוא אחד משני פיתרונות מנוּוָנים, וזה שבתיכנון התחתון הוא אחד משלושה, כך שסה"כ מיספר הפיתרונות הוא אחד־עשר. הפיתרון בעל המינימום המוחלט הוא זה המתואר בחלק העליון — הוא בעל האנרגיה הנמוכה ביותר. ניתן לתאר מצבי־מינימום בעזרת עקומת אנרגיה (תמונה 10). אפשר לעבור ממצב אחד למצב שני, על ידי מעבר מעל ל"מחסום אֶנֶרגֶטי"; ואמנם, על ידי נִעוּר וטילטוּל הכריך, או נשיפה קלה בקרומי הסבון, ניתן לעבור מצורת קרום אחת לאחרת. מוּכָּרוֹת לנו מערכות פיסיקָליות שיכולות להתקַיֵם במצבים שונים. למשל למולקולת ציקלוֹהֶכּסָן שני מצבי "כיסא" שוֵי־אנרגיה (תמונה 11). כדי לעבור מצוּרה אחת לצוּרה שניָה יש צורך להשקיע אנרגיה, כדי לאפשר למערכת לעבור מעל למחסום האנרגטי. המצב אָנָלוגי לשני הפיתרונות המנוּוָנים בדוּגמה של ארבע נקודות בקודקודיו של ריבוע.

**כיצד חוצים נהר?**

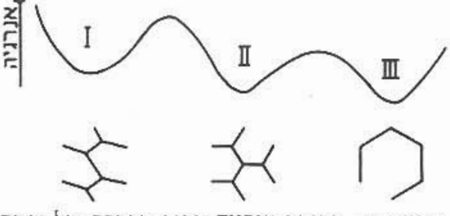
בעיַת מינימום אורכי הקטעים המחברים נקודות על פני מישור עשׂוּיה להיות בעלת עניָן למתכנני דרכים, תעלות־מים ורשתות חשמל וטלפון. מובן, שפרט לאורך־המסלול נכנסים גם שיקולים אחרים, כגון אופי הקרקע, הטוֹפּוֹגרָפיה, מחיר הקרקעות ועוד. אם נזניח גורמים אלה ונרצה לתַכנן רשת־טלפונים בעלת אורך חוטים מיזערי בין הערים הגדולות בארץ, כל שנצטרך לעשות הוא להכין כריך בדמות מפת ישראל, מוּצמדת במסמרים, הקבועים בנקודות המתאימות לערים הגדולות. צורת קרומי־הסבון שיתקבלו לאחר טבילת הכריך במֵי־סבון תיתן את הפיתרון המבוקש. אנו כבר יודעים שיתקבלו פיתרונות רבים ונצטרך לבחור מתוכם את הפיתרון שבו האורך הכללי של החוטים הוא הקצר ביותר. שני פיתרונות אפשריים מופיעים בתמונה 12.

כאמור, אין פיתרונות אלה לוקחים בחשבון את אופי הקרקע והטופוגרפיה. אולם ניתן לכלול בשיקול המסלולים המיזעריים מיכשולים שאוסרים כליל מעברו של קרום באיזור מסוּיָם. זאת ניתן לעשות על ידי כך שנגזור מהלוח העליון והתחתון של כריך הפלַסטיק את השטח המתאים לאיזור האסור במעבר. מכיוָן שקרום הסבון חַיָב להישען על לוחות־פלַסטיק, הוא יעקוף את האיזור הגזור, תוך שמירת העיקרון של אורך מיזערי. בתמונה 13 נראה כריך מרובע, שמשני לוּחוֹתיו נגזרו מישטחים עגולים. ואמנם, קרום הסבּוֹן עוקף את ה"איזור האסור". לפנינו איפוא פיתרון לבעיַת מינימום עם אילוּצים. בבעיַת רשת הטלפונים הארצית אפשר היה לכלול אילוצים כגון אגמים או הרים בלתי־עבירים, על ידי גזירת האזורים המתאימים מתוך לוחות הפלַסטיק.

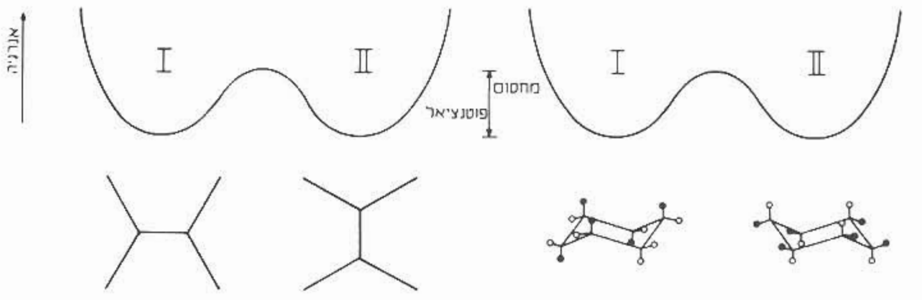
ניתן להוסיף ולהרחיב את השימוש בכריכי הפלַסטיק לפיתרון בעיות של אוֹפּטימָליזָציה. אם נשנה את הרוחב החופשי בחלקים השונים של הכריך, תשתנה דרישת מינימום־האורך למינימוּם־השטח. כלומר, במקום שהסכום $l_1 + l_2 + l_3 + \ldots$




**תמונה 9:** הפיתרונות היציבים לבעיַת מינימום האורכים עבור ששת קודקודיו של משושה משוכלל.

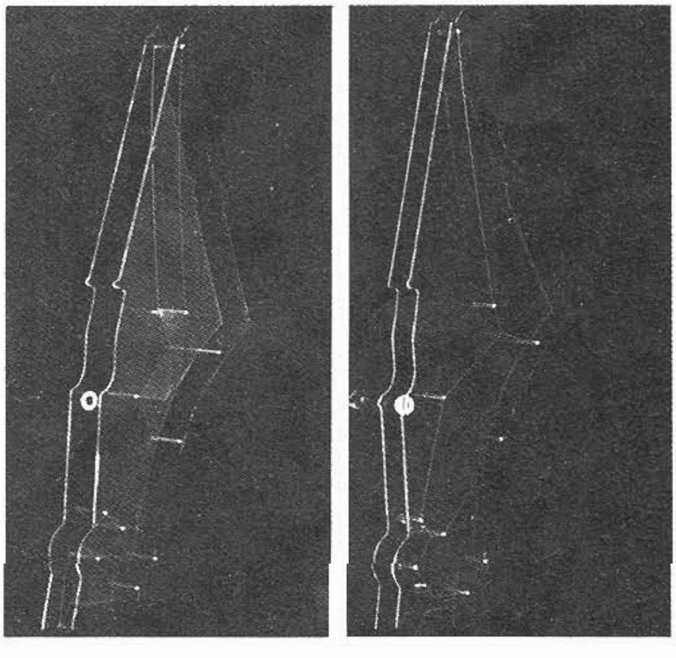



**תמונה 10:** עקומת אֶנֶרְגִיָה עבור מערכת של ששת קודקודיו של משושה משוכלל. השיאים מְיַצגים את המחסומים האנרגטיים למעבר מצורה לצורה.




**תמונה 11:** הדמיון בין פיתרונות בעיַת ארבעה קודקודיו של ריבוע וצורות ה״כיסא״ של ציקלוהֶכסָן. בשני המיקרים קַיָמים שני מצבים מנוֹנָנים. כדי לעבור מצורה אחת לאחרת יש לעבור מחסום פוֹטֶנציאָל.

יהיה מיזערי נדרוש שסכום המכפלות $l_1d_1+l_2d_2+l_3d_3+\dots$ יהיה מיזערי. (במשוָאות אלוּ ה־l-ים הם אורכי הקטעים וה־d-ים רְחָביהם). בתמונה 14 מופיע כריך־פלַסטיק מוצמד בשני מסמרים. בצידו הפנימי של אחד מהלוחות הודבק לוּחַ פלַסטיק באופן שהמירוָח החופשי בחלק זה הוא מחצית מהמירוָח החופשי בחלק האחר. הדרישה עכשיו היא שהסכום $l_1d_1+l_2d_2$ יהיה מיזערי. הקרום יעשה דרך ארוכה־יותר באיזור הצר, תוך קיצור הדרך באיזור הרחב. כתוצאה מכך נקבל ״שבר״ בקרום הסבּוֹן, כפי שאמנם נראה בתמונה. הצורה המתקבלת מזכירה את התנהגותה של קרן־אור, אשר עוברת מתָוֶך אחד לשני, למשל מאוִיר למים. ואמנם הבסיס הפיסיקָלי לשתי התופעות הוא זהה: לגבי האור, החוק שמכתיב את מסלוּלה של הקרן הוא שזמן מעבר־האוֹר מנקודה אחת לאחרת צריך להיות מיזערי, לפי עקרון פֶּרמָה (Pierre de Fermat). מהירות האור בחומר היא $c/\mu$ כאשר c היא מהירות־האור בחלל הריק ו- $\mu$ גורם־השבירה של החומר. לכן עבור אור העובר דרך שני חומרים בעלי גורמי שבירה $\mu_1$ ו- $\mu_2$ יהיה זמן המעבר $(l_1\mu_1+l_2\mu_2)/c$ והדרישה לזמן מיזערי היא שהסכום $l_1\mu_1+l_2\mu_2$ יהיה מינימָלי. מישוָאה זו דומה לחלוטין למישוָאה עבור שטח קרום מיזערי, אם נזַהה את עובי הקרום d עם מקדם־השבירה של האור $\mu$.

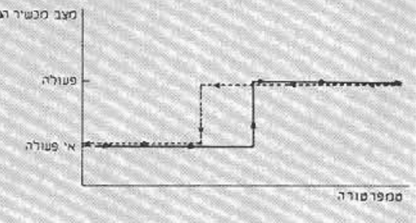


**תמונה 12:** כריכים ברמות מפת ישראל עם מסמרים המיַצגים את הערים המרכזיות. בתצלומים נראים שני פיתרונות אפשריים מתוך רבים.

דוּגמה אחרת לאוֹפטימָליזָציה בעזרת קרומי־סבּון מובאת בתמונה 15. זהו מודל לחישוב המסלול המהיר ביותר למעבר בין שתי נקודות, כאשר ביניהן מתפתל נהר בעל רוחב מישתנה,

## מונחים

**הִיסטֶרֶסיס** — אם תכונה מסוימת של מערכת תלויה לא רק בתנאים החיצוניים הנוכחים אלא גם בקורותיה בעבר אומרים שיש במערכת היסטֶרֶסיס. המונח מתיחס הן לחֶשֶל (פיגור בין הפעלת גורם חיצוני לתגובת המערכת) והן למערכת שאינה שָבה במדויק על עקבותיה (ראה שרטוט). היסטֶרֶסיס מוּכֶּרת במערכות מכָניוֹת (עִוּוּת גוף בעקבות הפעלת כוח חצוני עליו), במידת המיגנוט של חומר פֶרוֹמָגנֶטי ומשמשת בהנדסה ובמערכות ביולוגיות.




**חומר פֶרוֹמַגנֶטי** — חומר שהאטומים שלו הם מַגנֶטים חזקים, כך שבאופן ספּוֹנטָני קַיָמים בו אזורים ממוּגנטים והוא מחַזֵק שדה מגנטי חיצוני עשרות מונים (עד פי עשרות־אלפים). המתכות ברזל (Ferrum בלטינית — ברזל), קוֹבַּלְט, ניקֶל וסגסוגות שלהן הם חומרים פֶרו־מַגנֶטיים.

**חומר פָּרָמַגנֶטי** — חומר שהאטומים שלו מהַוִים מגנטים זעירים. כשחומר פָּרָמַגנֶטי שרוי בשדה מגנטי חיצוני, נוטים האטומים שלו להסתדר לפי שדה זה, כך שהוא מחזק, אך רק במידת־מה, את השדה המגנטי החיצוני.

**מינימום מקומי ומינימום מוחלט** — לפוּנקציה שעולה ויורדת חליפות (תמונה 10) ישנן מיספר נקודות־מינימוּם ומיספר נקודות־מַכּ־סימוּם. נקודת המינימום בה ערך הפונקציה הוא הנמוך ביותר היא נקודת המינימום המוחלט. נקודות המינימום האחרות הן נקודות של מינימום מקומי.

**מעברי פָזָה מְסֵדֶר ראשון ומְסֵדֶר שני** — במעברי־פזה מסדר ראשון חל שינוי בלתי־ר־ציף (״קפיצה״) בתכונות החומר (צפיפות, מיבנה גבישי וכד׳), כאשר החומר עובר ממצב־צבירה (פָזָה) אחד לשני. מעברי־פָזה אלה מלוּוִים בשיחרור של חוֹם (״חוֹם כָּמוּס״) או בקליטתו. מעברי־פזה מסדר שני מלוּוִים בשינויים רציפים בתכונות החומר, אך לא בשיחרור או בקליטה של חום כמוס.

**נקודת־קירי** — לכל חומר פֶרוֹמַגנֶטי טמפרטורה אוֹפיָנית, שבה הוא מאַבֵּד את הפֶרוֹמַגנֶטיוּת והופך פָּרָמַגנֶטי. על־שם פּייֵר קירי (P. Curie) שעסק, עוד לפני מחקריו בּרַדיוֹאַקטיוִיוּת, בחקר תופעות מַגנטיוּת.

בהנחה שמהירות־המעבר בנהר קטנה פי־שניים מהמהירות ביבשה. הכריך הוכן כך שעובי המירוח ב"נהר" הוא כפול מזה שב"יבשה". גם כאן רואים שיש שני פיתרונות — מי מהם יותר מהיר ניתן למצוא על ידי מדידה ישירה.

## מיסגרות וסריגים

עד כה תארנו התנהגות קרומי־סבון כאשר גבו־לות הקרום ("תנאי השפה של הבעיה") היו בחלקם קבועים (מסמרים) ובחלקם חופשיים (פני לוחות הכריך). קרום הסבון היה חופשי לנוע במירוח שבין הלוחות, במסלול המיזערי המחבר את המסמרים השונים. בפרק זה נדון בקרומים הנוצרים במיסגרות, בהם כל גבולות הקרום קבועים. שוב יכתיב עיקרון השטח המיזערי את צורת הקרום.

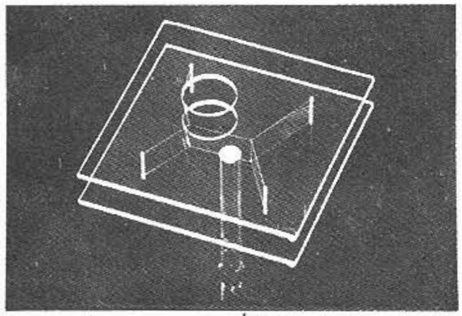
מובן שבמיסגרת מישורית ייוָצר קרום במישור המיסגרת, וכל כיפוף או פיתול רק יגדילו את שטחו; אולם אם המיסגרת אינה מישורית יקבל הקרום צורה מורכבת־יותר. חישוב השטחים המיזעריים במיסגרות כאלו הוא בדרך־כלל מסובך ביותר וניתן לחישוב אנליטי רק עבור צורות פשוטות במיוחד. שורה ארוכה של מתימטיקאים בעלי־שם תרמו לנושא זה: האב והבן בֶּרנולי, ניוטון, אוֹילֶר, לַגרַנג' ואחרים (Bernuolli, Newton, Euler, Lagrange).

אם במקום מיסגרת פשוטה נשתמש במערכת של מיסגרות, כלומר: בסריג, נקבל מערכת של קרומים מורכבת ולעיתים בעלת צורה מפתיעה ביותר. גם כאן חישוב אנליטי של הצורות המתקבלות אפשרי רק למקרים פשוטים במיוחד. הסריג הפשוט ביותר, הארבעון (טֶטרָהֶדרוֹן) הוא הפֵאון בעל המיספר הקטן ביותר של פאוֹת (4) וצלעות (6) (תמונה 16). אילו כוסו כל פֵאותיו בקרום היה השטח הכללי ארבע פעמים שטח של פֵאה בודדת, כלומר $4\times(1/2a\times\sqrt{3/2}a)=1.73a^2$ (כאשר a היא הצלע). למעשה מתקבל קרום כמתואר בתמונה 16. הוא מורכב משישה משולשים שוֵי־צלעות, הנפגשים באמצע הארבעון והנשענים על כל אחד מששת מקצועותיו. כל שלושה קרומים נפגשים לאורך התפרים היוצאים מקדקדי הארבעון וכל ארבעת התפרים נפגשים במרכזו. המיבנה הוא בעל סימטריה גבוהה ביותר: הזָוית בין הקרומים, לאורך קוֵי־התפר, היא בדיוק 120° (זוית זו נמדדת במישור החותך את הקרומים בניצב לקו־החיבּור) והזוית בין קוֵי־התפר, הנפגשים במרכז הארבעון, היא בדיוק 109° 28′ [1]. קל להיוָכח ששטחו הכללי של הקרום הוא $6\times(1/2a\times\sqrt{2}/4a)=1.06a^2$, זהו חיסכון ניכר בשטח לעומת כיסוי ארבע ($1.73a^2$) או אפילו רק שלוש ($1.30a^2$) מפאותיו.

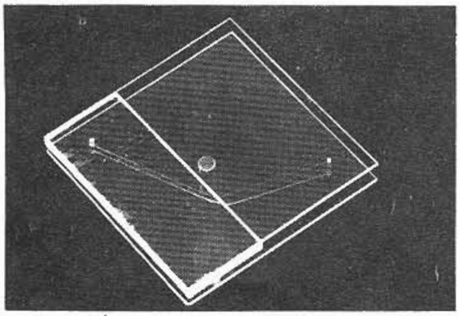
צורת הקרומים המתקבלת בארבעון מדגימה את קוֵי האופי העיקריים של הקרומים המתקבלים בסריגים מרחביים. צורות אלוּ חקר פלָטוֹ (Plateau) לפני למעלה ממאה שנים. בתצפיותיו גילה פלָטו את שני החוקים הבסיסיים הקובעים את צורתם של קרומי־סבון בסריגים מרחביים:

(א) שלושה קרומים נפגשים לאורך קוי־חיבּור (תפרים), כך שהזָוית בין המישורים היא 120°.

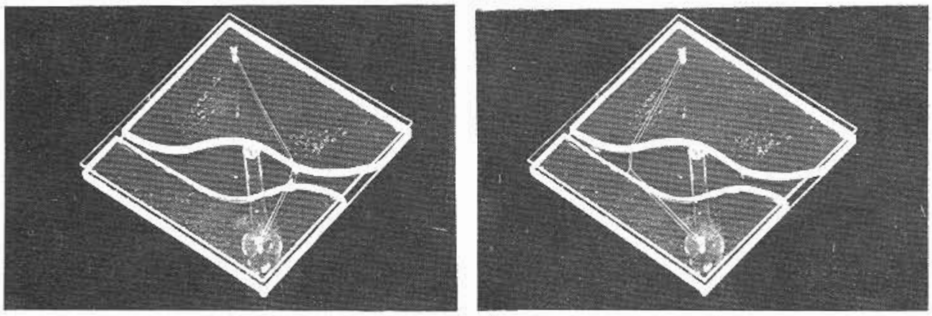
(ב) ארבעה תפרים מתלכּדים בנקודה, כך שהזָוית בין כל שני קוים היא 109°28′.



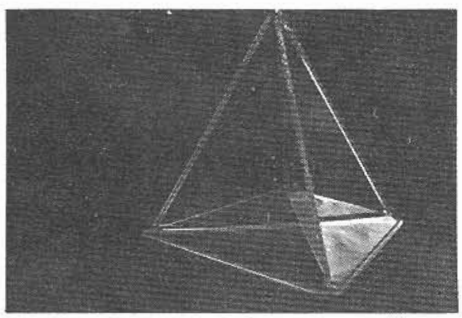
**תמונה 13**: כריך שמשני לוחותיו נגזרו עיגולים. קרום הסבון שנוצר עוקף את האיזור הגזור.



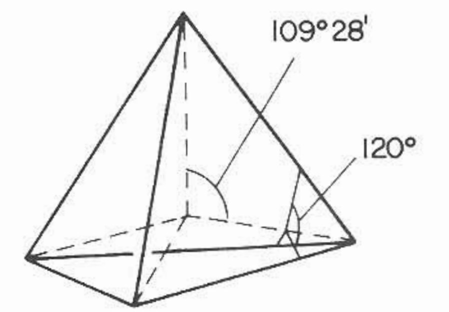
**תמונה 14**: קרום הסבון הנוצר בכריך בעל שני אזורים, הנבדלים ברֶוח החופשי שבֵין הלוחות.

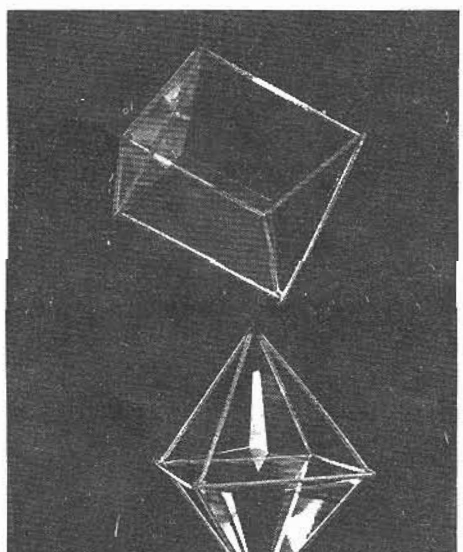


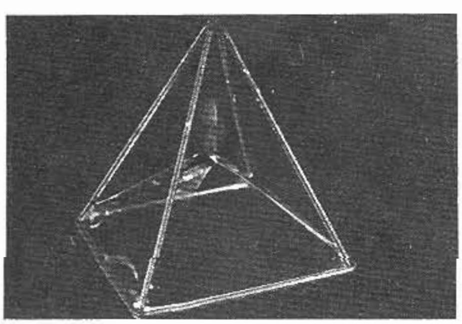
**תמונה 15**: שני הפיתרונות האפשריים לבעיַת הדרך המהירה לחצית־נהר.



**תמונה 16**: קרומי הסבון הנוצרים בארבָּעון (טֶטרָהֶדרון).





**תמונה 17**: קרומי הסבון הנוצרים במינסרה משולשת (ימין למעלה), בתמָניון (אוקטָהֶדרון, ימין למטה) ובפירמידה (שמאל למעלה).

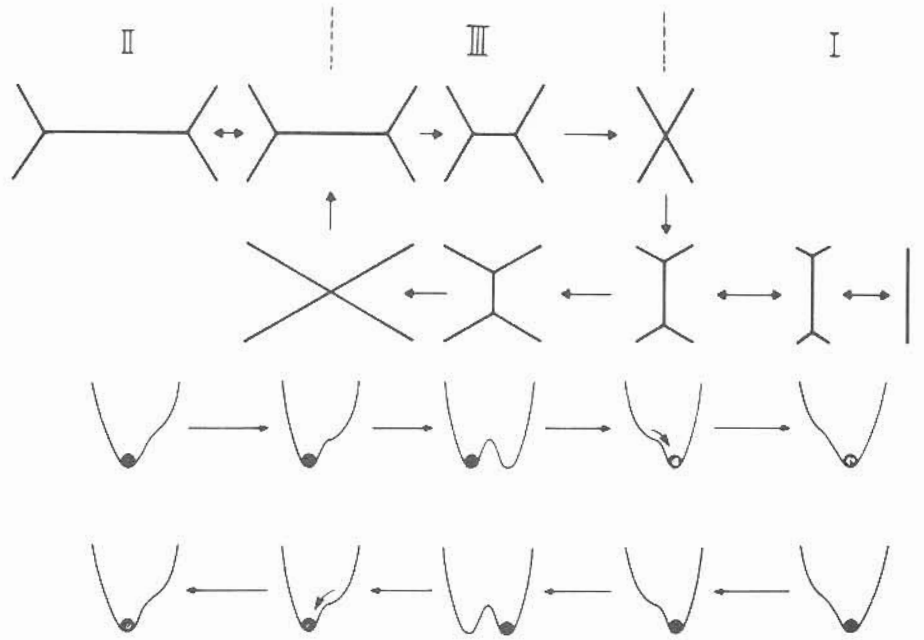
חוקי פלָטו הם כלליים ותופסים עבור קרומי הסבון הנוצרים בכל סריג מרחבי ולא רק בארבעון. ככל שהסריג מורכב־יותר כן מורכבות־יותר צורות הקרומים שנוצרים בו ועולה מיספר האפשרויות. בתמונה 17 מובאים תצלומים הכוללים תְמָניון (אוֹקטָהֶדרוֹן), פירמידה ומינסרה משולשת. גם בצברי בּוּעוֹת, הנוצרים בנשיפת־אויר דרך תמיסת־סבון, מתקיימים חוקי פלטו. במיוחד ידועה התופעה שבצבר בועות הנשען על לוח זכוכית יש מיספר רב של "בּוּעוֹת משוּשוֹת" — מיפגש של קרומים בזָוית של 120°.

1) ראה: "109°28′ — זוית הקסם" מאת ולדימיר גרשוביץ, "מדע" כ"ו-4 (1982) עמ' 174.

## מְמַדים מישתנים

עד־כה דנו בכריכים, במיסגרות ובסריגים קבו־עים. אולם ניתן להרחיב את הדיון גם למודלים בעלי מְמַדים מישתנים ולעקוב אחר התנהגות קרומי הסבון בעקבות שינויים בִמְמַדֵי המודל. ניסויים מסוג זה עשויים לעזור בהדגמת תהליכים כגון מעברים של מצבי־צבירה ותגובות כימיות, וכן להדגים את אופְיָם של פיתרונות מָתֵמָטיים ותלותם בתנאי הבעיה. למשל: כריך בעל ארבעה מסמרים מהם שנַיִם קבועים ושנַיִם נָיָדים. בעזרת מודל כזה ניתן לעבור ממלבן מוארך, דרך ריבוע, למלבן פחוס, ולהפך. כאשר זוגות המסמרים מרוחקים זה מזה במידה מְרַבִּית (מלבן פחוס) מתקבלים שני צמתים (תמונה 18 שורה עליונה, שמאל) וקל להראות שהמירוָח בֵין נקודות הצומת הוא $l-a/\sqrt{3}$ ואילו האורך הכללי של הקרום הוא $l+a\sqrt{3}$ (a הוא המרחק הקבוע שבין זוגות המסמרים ו־l המרחק המישתנה שביניהם). כאשר נקרב את זוגות המסמרים (כלומר נקטין את l) נגיע לנקודה שבה $l=a/\sqrt{3}$ ושתי נקודות הצומת תגענה זו בזו. מצב זה אינו יציב, שֶכֵּן בהתאם לכללי שטַיְנר, בנקודות־צומת נפגשים שלושה קרומים בלבד ולא ארבעה. ואמנם, המערכת תשתנה באופן ספונטָני (תמונה 18 שורה שניה, אמצע) לקרום בעל שתי נקודות־צומת, אולם עכשיו הן ערוכות במאונך ולא באופן אופקי. אם נמשיך ונכַוֵּץ את המלבן תתרחקנה נקודות הצומת זו מזו עד שיהפך הקרום לקו בודד, (תמונה 18, שורה שניה, ימין). אולם אם נרחיק את זוגות המסמרים, שוב תתקרבנה נקודות הצומת זו לזו. המרחק בין נקודות־הצומת הוא עכשיו $a-l/\sqrt{3}$ והאורך הכללי של הקרום $a+l\sqrt{3}$. לכן, כאשר המלבן ישתוֶה ל־$a\sqrt{3}$, שוב תתלכדנה נקודות־הצומת (תמונה 18, שורה שניה, שמאל) והמערכת תחזור באופן ספונטני לצורתה המקורית. אנו רואים איפוא שבהתאם ליחס בין רוחב המלבן לאורכו ניתן להבחין בשלושה אזורים: (I) כאשר $l/a$ קטן מ־$1/\sqrt{3}$ קַיָם רק פיתרון אחד, שבו נקודות־הצומת הן במאונך. (II) כאשר $l/a$ גדול מ־$\sqrt{3}$, שוב קַיָם רק פיתרון אחד, בו שתי נקודות־הצומת הן במצב אופקי. (III) כאשר $l/a$ הוא בתחום שבֵין $1/\sqrt{3}$ ו־$\sqrt{3}$, קַיָמים שני הפיתרונות ומצב־המערכת נקבע על ידי "ההיסטו־ריה" שלה. בנקודה שבה $l/a=1$ שני הפיתרונות שָוים והמצב זהה לזה של הריבוע. גם כאן ניתן לתאר את התנהגות המערכת בעזרת עקומות אֶנֶרגיה, (תמונה 18, שורות שלישית ורביעית) כאשר האנרגיה מיוצגת על ידי אורכם הכללי של קרומֵי הסבון. המצבים היציבים של המערכת מתוארים על ידי נקודות־המינימום של העקומות; בתחומים (I) ו־(II) יש למערכת מינימום אחד בלבד; באזור III יש לה שתי נקודות־מינימום ולכן קַיָמים שני פיתרונות.

התנהגות קרומי הסבון בַמודל שתואר לעיל אָנָלוגית "למעבר פָזָה מִסֵדר ראשון". במעבר פָזָה כזה חל שינוי בלתי־רציף, למשל, התכה של קרח למים. את האורך הכללי של קרום הסבון במודל זה ניתן לזהות עם האנרגיה של המערכת ואילו את רוחב המלבן, l, עם הטמפרטורה. המצב $l=a$ מתאים לטמפרטורה שבה לשתי פזות (מים וקרח) אותה אנרגיה — שהיא טמפרטורת ההתכה של מים. כאשר l קטן מ־a הצורה היציבה מיַצגת קרח ואילו הצורה הבלתי־יציבה מיַצגת מים מקוררים־




**תמונה 18:** צורות־הקרומים ועקומות־האנרגיה בכריך מישתנה. הכדור (שורות תחתונות) מיַצג את מצב המערכת בכל שלב של הניסוי.

בִיֶתר. ולהפך, כאשר l גדול מ־a מיַצגת הצורה היציבה מים ואילו הקרח הוא עכשיו "מחומם־ביתר". תופעות אלה, של חימום־בִיֶתר או קרור־ביתר, הן מקרים פרטיים של היסטֶרֶסיס (ראה מילון המונחים), ואופיָניים למעברי־פזה מסדר ראשון.

בניגוד למעברים מסדר־ראשון ישנם מקרים שבהם חל שינוי רציף במיבנה החומר בטמפרטורת מעבר־הפזה. למשל, כאשר מחַממים ברזל מעל טמפרטורת־החדר נחלשת הפֶרוֹמָגנֶטיוּת (ראה מילון המונחים) שלו בהדרגה, עד שבטמפרטורה של 770° (טמפרטורת קירי) היא נעלמת לחלוטין ומקַבלים ברזל פָּרָמַגנֶטי. התהליך הוא הפיך וכאשר חוזרים ומקררים את הברזל, מתחת לטמפרטורת קירי, הוא שב ונעשה פֶרוֹמָגנֶטי בהדרגה. לא ניתן לקבל ברזל פֶרוֹמגנטי מחומם־בִיֶתר וכן לא ניתן לקבל ברזל פָּרָמגנטי מקורר־בִיֶתר. במונחים של עקומת־אנרגיה אנו אומרים שקַיָם רק פיתרון אחד למערכת בכל תחום הטמפרטורה.

ניתן לבנות מודל אנלוגי למעבר־פזה רציף בעזרת כריך[2], כמתואר בתמונה 19. הכריך כולל שני מסמרים ויש בו שני אזורים שונֵי־עובי: האי־זור האחד כולל את פְנים הפָרַבּולה ועוביו כפול מזה שבאיזור שמחוץ לפרבולה. מסמר אחד נעוץ בציר הסימטריה של הפרבולה ואילו המסמר השני יכול לנוע באיזור החיצוני, לאורך ציר הסימטריה. כאשר טובלים כריך זה בתמיסת־סבון נוצר קרום המחבר את שני המסמרים.

צורת הקרום תלויָה במקומו של המסמר הנָיָד. שטח הקרום הוא $l_1d_1+l_2d_2$ (המיספרים 1 ו־2 מתיחסים לשני האזורים בכריך). מתברר שכאשר קרוב המסמר הנָיָד לבסיס הפרבולה יוצר הקרום קו ישר המחבר את שני המסמרים, אולם כאשר מרחיקים את המסמר הנָיָד מגיעים לנקודה שבה נשבר הקרום לשני קטעים שאינם לאורך הישר. התנהגות הקרום היא הפיכה לחלוטין וכאשר חוזרים ומקרבים את המסמר הנָיָד אל בסיס הפרבולה נעלם השבר בהדרגה, עד שהקרום מתישר באותה נקודה שבה התחיל להִיוָצר השֶבר, בעת שליפת המסמר החוצה.

★

הדגמנו את התנהגותם של קרומי־סבון ואת אפשרויות השימוש בהם כבמודלים לתופעת טבע ולבעיות הנדסיות.

בעזרת קרומי־סבון ניתן להדגים ולחקור גם תופעות שבהן לא עסקנו. למשל: כפי שיוֹדע כל מי שחזה בקרומי־סבון מופיעות בהם סדרות של צבעי הקשת. תופעה זו מאפשרת לְמידה של התאבּכות ותכונות פיסיקליות אחרות של האור. תופעה אחרת שניתנת להדגמה היא גמישות הקרומים והקשר בֵין הגמישות ובין התנודות העצמיות של הקרומים: על ידי טילטול קרום־סבון נוצרים בו גלי־עִיוּות הניתנים להסבר לפי תורת הרֶטט.

### לקריאה נוספת


צ׳ארלס ורנון בויס "בועות סבון והכוחות המעצבים אותן". ספרית מדע לעם, הוצאת דביר, תרגם חיים בן־עמרם.

Cyril Isenberg: "The Science of Soap Films and Soap Bubbles", Tieto Ltd., Avan, England (1978). 188 p.


2) מודל זה הוצע למחבר ע"י פרופ׳ משה קוגלר מהמחלקה לפיסיקה גרעינית, מכון ויצמן למדע.

**תמונה 19:** ניסוי בכריך מישתנה: תלות הקרום במיקומו של המסמר הנָיָד.