מתוך הספר: טוב מעשה במחשבה תחילה

פרקים ז', ח', ט'

עמודים: 110 - 200

כהן, עמוס (2001). **טוב מעשה במחשבה תחילה: מדריך ללמידה באמצעות פרויקטים מדעיים יצירתיים**. תל אביב: מכון מופ"ת.

באתר מכון מופ"ת:

http://www.mofet.macam.ac.il/ktiva/publish/catalog/Pages/Kalil/tovmase.aspx

~~~~~~

ד"ר עמוס כהן - מנהל אקדמי פדגוגי מרכז **אחר"ת** ומנהל בית המדרש למורים חוקרים בפיזיקה **'נקודת ארכימדס'**
מרצה לפיזיקה ולהוראת המדעים, **אורנים** – המכללה האקדמית לחינוך
דוא"ל: amos_c@oranim.ac.il
טלפון נייד: 0524794961

אתר מרכז אחר"ת: http://www.acheret.org.il
דף אישי: http://www.oranim.ac.il/personal/amos_c/default.aspx
~~~~~~

מכון מופ"ת
בית ספר למחקר ופיתוח תכניות
בהכשרת עובדי חינוך והוראה במכללות

ליל הוצאת ספרים
בנושאי חינוך

טוֹב מַעֲשֶׂה בְּמַחֲשָׁבָה תְּחִלָּה

מדריך ללמידה באמצעות פרויקטים מדעיים יצירתיים

עמוס כהן

Amos Cohn

Thinking and doing in science: a guide for parents and teachers

כתיבה: **עמוס כהן**

עריכה: **נעמי פרידמן**

סיוע בכתיבה: **אורית כהן-שניר**

עיצוב גרפי: **בלה טאובר**

מסת"ב: 965-7182-22-0

***מען למכתבים:* ת"ד 48538 תל אביב מיקוד 61484**

טל' 03-6901406 פקס' 03-6901449

רח' שושנה פרסיץ 15, תל אביב (בבניין מכללת לוינסקי)

Email: info@mofet.macam.ac.il

www.mofet.macam.ac.il

הדפסה: דפוס **קדם**, תל אביב 03-6811197

תוכן העניינים

הקדמה 6

מבוא: למה בכלל פרויקטים? 10

פרק א׳: מהי למידה על ידי פרויקטים יצירתיים במדע? 24

פרק ב׳: נחפשה דרכינו ונחקרה
היבטים בפיתוח של פרויקט מדעי יצירתי 39

פרק ג׳: תפקיד המנחה 61

פרק ד׳: ללכת בדרך בית היוצר 72

פרק ה׳: ״אנחנו רואים את מה שאנו יודעים לראות!״
הקשת בענן-טיפות ואור 83

פרק ו׳: עבודה עיונית כתובה על פרויקט יצירתי –
התהליך והתוצרים 99

פרק ז׳: קרומי סבון – ופתרון בעיות מתמטיות מהחיים 110

פרק ח׳: סריגי סבון מרחביים 153

פרק ט׳: יצירה לסבון ולצבע 182

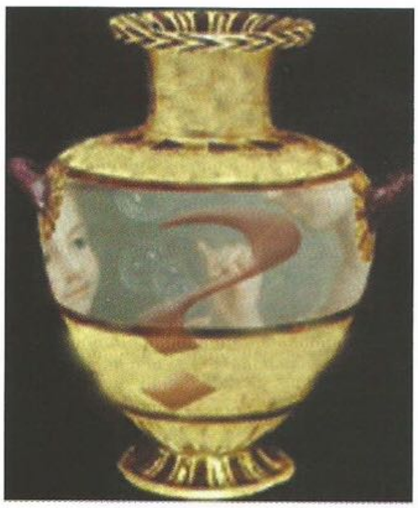
פרק י׳: בעיית הריצוף 201

פרק י״א: אֶמְפִּירִי וְאַפְּרִיּוֹרִי 216

אחרית דבר: סוף מעשה במחשבה תחילה 240

נספח: כתבי עת ומקורות מידע לעבודה בפרויקטים 243

פרק ז׳
קרומי סבון –
ופתרון בעיות מתמטיות מהחיים



בספרות המדעית מוזכר שוב ושוב אגרטל אטרוסקי עתיק במוזאון הלובר בפריז, המתאר **ילדים משחקים בבועות סבון**.

חיפשתי בעמל רב את תמונתו של אותו אגרטל אטרוסקי - ולא מצאתיה.

המתמטיקאי האיטלקי מישֶל אֶמֶר שעסק רבות בקרומי סבון, הן באמנות והן במדע - מציין כי ככל הנראה, נעלמו עקבותיו של האגרטל האטרוסקי הזה ממוזאון הלובר בפריז ...

בפרק זה נדגים פרויקט מדעי יצירתי על פי העקרונות שמנינו בספר, תוך הערות והתאמות לגילאים שונים. הפרויקט הזה מתאים באופנים שונים לילדים בגיל הרך, בבית הספר היסודי, בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה. ורבים מן הנושאים מתאימים גם לסטודנטים באקדמיה ולמתעניינים מבוגרים.

נוכל לעקוב אחר שורה של פרויקטים המתקשרים כולם לקרומי סבון ולפתרון בעיות מתמטיות מן החיים. לעתים נתמקד ונעמיק בנושאים מתמטיים-פיזיקליים.

בשלושת הפרקים - ז׳, ח׳, ט׳ - נעסוק בבעיות הסבון, ובפרק י׳ נטפל בבעיית הריצוף. בעיה זו היא המשך טבעי לנושא הסבון, והיא יפה ומרתקת גם בזכות עצמה.

הקדמה

לכאורה יכול כל אחד מאתנו לומר, ובצדק מסוים: מה כבר יש לי ללמוד על סבון? כל אחד מאתנו הוא כמעט "פרופסור לסבון", שהרי מיד בקומנו בבוקר אנו רוחצים פנים וידיים בסבון, לעתים אף מתקלחים במים וסבון וחופפים את ראשנו במיני סבונים

המכונים שמפו, וכו'. המבוגרים שבינינו אף רוחצים כלים בסבון כלים ומפעילים מדיח עם סבון למדיח. המהדרין אפילו מכניסים בגדים למכונת הכביסה ומפעילים תכנית כביסה מתקדמת בסוגים שונים של... סבון.

מפעם לפעם שוטפים את הבית, מנגבים אבק ומנקים חלונות במים ובסבון, ואף נותנים לילדים באמבטיה לשחק במים ובסבון. לכולנו יש "רומן ארוך ועשיר עם סבון" - במגוון רב מאוד של מופעים שונים.

ואכן, בצדק מסוים, אמרו לי פעם חברים בדיון, שבו הצעתי להם את פרויקט הסבון: "עמוס" - כך אמרו - "אתה בוודאי יכול לתת לנו הרצאה מרתקת על כל נושא בפיזיקה ומתמטיקה, אבל בסבון אנו מומחים גמורים. כל אחד מאתנו כבר יודע הכול על סבון. מה כבר תוכל לחדש לנו על סבון שלא ידענו מזמן?"

"זהו, חד משמעי," סיכמו החברים, "על סבון אנו יודעים הכול!"

הסכמתי אתם... אבל הבטחתי שמיד נכיר עוד כמה תכונות מפתיעות על סבון, שטרם הכרנו עד היום.

מבוא

לקרומי הסבון תכונות מיוחדות: הם נאחזים במסגרת קשיחה ורציפה שנטבלה במי הסבון ויוצרים משטח הממלא את התחום המוגבל על ידי המסגרת. המסגרת היא השפה החיצונית, הגבול של משטח קרום הסבון.

והנה, תוך כדי התנסות בקרומי סבון, מתברר לנו, כי משטח קרום הסבון הוא **משטח גמיש** (אלסטי), היכול לשנות את צורתו: בהשפעת כוח חיצוני כמו משב רוח או כף יד הרטובה במי סבון - הקרום נמתח ומתנפח.

אך ראו זה פלא: גם בהיעדר כוחות חיצוניים הפועלים על קרום הסבון - צורתו הולכת ומשתנה. הקרום הולך ומתכווץ ממש לנגד עינינו: כמו כוחות קפיציים פועלים בתוך הקרום וגורמים לו להתכווץ ולהקטין את שטחו ככל האפשר!

משטח קרום הסבון הולך ומתכווץ, מתכווץ והולך, עד שהקרום מגיע למצב שאין להתכווץ ממנו עוד: פני השטח של קרום הסבון הם כעת הקטנים ביותר האפשריים, שעדיין מחברים את המסגרת הנתונה.

התכונה המיוחדת הזו של הסבון מאפשרת לאנשי מדע מתחומים שונים להשתמש בקרומי הסבון על מנת לפתור בעיות סבוכות ביותר. כימאים משתמשים בקרומי הסבון על מנת למצוא כיצד מסודרים אטומים במולקולות מסוימות.

מהנדסים ומתכנני ערים וכבישים נעזרים במתמטיקה של קרומי הסבון כדי לשפר ולשכלל את תכניותיהם.

האדריכל הגרמני פריי אוטו (Frei Otto) תכנן ובנה מבנים רבים, לרבות מבני תערוכות, בעזרת קרומי סבון. הוא תכנן את האיצטדיון הענק שהוקם לקראת האולימפיאדה במינכן 1972, חיקה את העקמומיות של קרומי הסבון והשיג בכך מבנה קל וחזק במיוחד.

לתכונה המיוחדת הזו, שבאה לידי ביטוי מרשים כל כך בקרומי סבון, קוראים תכונת **מתח הפנים של הקרום**.

עוד נדון בה בהמשך, בפרק ח', בסעיף "הכוחות בשטח" הדן באלסטיות של קרומי סבון.

אנו עושים שימוש בתכונה הפיזיקלית הזו כדי לפתור בעיות מתמטיות סבוכות ביותר, שפתרונן, בכלים מתמטיים, לעתים מסובך וקשה מאוד. במקרים מסוימים - הפתרון המתמטי האנליטי כלל אינו אפשרי בכלים המתמטיים הקיימים כיום.

פתרון הבעיות הללו בעזרת הסבון הוא שעשוע קל, מרתק ומהנה.

חלק ראשון: "על חומותיך הפקדתי שומרים"

(על היחס בין היקף לשטח)

"אין תוכו כברו" (בראשית רבה כח)

במקור, מדובר בתלמיד חכם שחיצוניותו אינה כפנימיותו.

הבעיה של דידו

במיתולוגיה הרומית קובצו סיפורים מהתרבות היוונית והרומית כאחד, תוך ניסיון לבנות מהם מערכת מיתולוגית שלמה, "רומית" ככל האפשר, שתהיה יותר מספח בלבד למיתולוגיה היוונית.

אחד הסיפורים המעניינים במיתולוגיה הרומית הוא הסיפור אודות הנסיכה דִידוֹ.

לפי המסופר, פקדו האלים יום אחד את הנסיכה הפיניקית דידו, הטילו עליה משימה (כפי שאנו מכירים גם היום בתכניות טלוויזיה מסוימות), והעמידו פרס יקר ערך לזכותה אם תעמוד במשימה.

המשימה שלך, אמרו האלים לנסיכה דידו, היא לצוד בטבע שור בר גדול, לפשוט את עורו ולהכין ממנו רצועה דקה דקה וארוכה ארוכה. את הרצועה יש לקשור בקצותיה ללולאה סגורה. וכעת יש להניח את הלולאה על אדמת הארץ, פרוסה על שטח רחב ככל האפשר.

והפרס? הפרס הוא כמובן כל שטח האדמה הכלוא בתוך הלולאה הסגורה. שטח זה יינתן במתנה על ידי האלים לנסיכה - אם תעמוד במשימה.

ואכן, ממשיכה ומספרת לנו המיתולוגיה הרומית העתיקה, ביצעה הנסיכה דידו את כל מה שצוותה:

היא צדה שור בר גדול, פשטה את עורו, גזרה מעור החיה רצועה דקה דקה וארוכה ארוכה, קשרה את קצות הרצועה ללולאה סגורה, והניחה את הלולאה על הקרקע.

ולפי המסופר במיתולוגיה עמדו האלים בהתחייבותם ונתנו לנסיכה הפיניקית דידו את מלוא שטח האדמה שהיה כלוא בתוך הלולאה הסגורה.

על פי המסורת נבנתה על שטח אדמה זה העיר קַרְתָּגוֹ - והפכה ברבות הימים למעצמה אדירה בזכות עצמה. לימים נאבקה קרתגו לצד רומי ולעתים כנגד רומי על השליטה בים התיכון ובחופיו.

עד כאן סיפור מיתולוגי "אמיתי", כלומר סיפור שאכן מופיע במקורות קדומים של התרבות הרומית. (ויתר דברי הנסיכה דידו, אהובה אנאס, והשפעתם על תולדות התרבות המערבית, הן בציור והן במוזיקה - הלא הם כתובים על ספר דברי הימים... וגם ... ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק זה.)

השם דידו אף מופיע כערך מיוחד באנציקלופדיה העברית.

ומה לנו, לבעיות מתמטיות מחיי היום יום - ולסיפור מיתולוגי עתיק זה?

הבעיה המתמטית העולה מהאגדה והמעסיקה אותנו היא:

באיזה אופן ראוי היה לה לנסיכה דידו לפרוס ולהניח את הלולאה הסגורה - כך ששטח האדמה הכלוא בה יהיה מרבי?

על כך אין המיתולוגיה הרומית אומרת דבר וחצי דבר. איננו יודעים כיצד נהגה דידו.

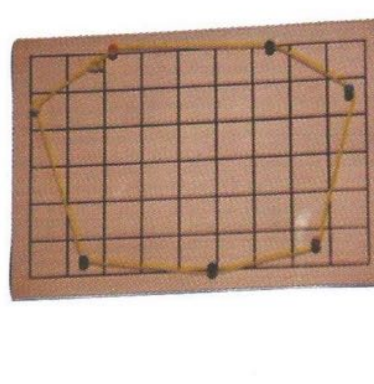
ומה דעתכם? מה תמליצו לה לנסיכה דידו?

פעילות: מסייעים לדידו

ניתן לחלק לכל אחד מהמשתתפים לוח משבצות, לולאה סגורה מחוט פשוט (שאינו ניתן למתיחה), וכמה סיכות עם ראש גדול ונוח לנעיצה.

כל אחד מהמשתתפים ינסה לכלוא משבצות רבות ככל האפשר בלולאה הנתונה, תוך שהוא פורס אותה עם הסיכות על פני הלוח.

מה היא הצורה, שבה תכיל הלולאה הנתונה שטח (מספר משבצות) מרבי?



הבעיה של דידו: לוח משבצות ולולאה סגורה

וכעת - "נשאל את פי הסבון":

נשתמש ב"כריך" העשוי מזוג לוחות פרספקס שקופים, המוחזקים במרווח קבוע של כ-2.0 ס"מ זה מזה (פירוט והסבר על אופן בניית המתקנים נביא בפרק ט': יצירה לסבון ולצבע).

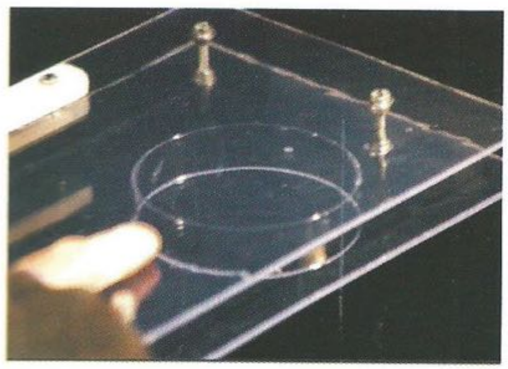
בעזרת קש שתייה נחדיר בועת סבון אל בין הלוחות. הבועה תסתדר מיד בין הלוחות בצורת גליל הנאחז בצד הפנימי של הלוחות וכולא כמות קבועה של אוויר בתוך הקרום שניפחנו.

במבט מלמעלה נראה גליל הסבון **כמעגל. זהו הפתרון לבעיה של דידו.**

כעת נוכל לנסות ולאלץ את קרום הסבון לשנות צורה: אם ניגע בו ביד יבשה - יתבקע קרום הסבון מיד.

אבל אם נטבול את ידנו היטב במי הסבון שלפנינו - נוכל לגעת בקרום הסבון ולשנות את צורתו ככל שנרצה.

וראו זה פלא: כשאך נרפה מן הסבון ונניח לו להסתדר ללא אילוץ חיצוני - יחזור הסבון להסתדר בצורה המקורית (גליל). הגליל הזה נראה לנו במבט מלמעלה כמעגל מושלם ממש.



הסבון פותר את הבעיה של דידו

חשוב לציין כי בעזרת הסבון טיפלנו בבעיה מתמטית חשובה ביותר:

הבעיה האִיזוֹפֶּרִימֶטְרִית = בעיית הצורות שוות ההיקף, במישור.

זו בעיה נכבדה שמטפלים בה בלימודי מתמטיקה אוניברסיטאיים - והנה בעזרת קרומי הסבון אנו יכולים לעסוק בהיבטים שלה עם ילדים צעירים למדיי.

מה מקור השם: הבעיה האיזופרימטרית?

אִיזוֹ = שווה.

פֶּרִימֶטֶר = היקף (מכאן נגזרת המילה פריפריה לציון כל מה שאינו במרכז אלא בהיקף, בשוליים).

ניתן להציג שני נוסחים שקולים לבעיה האיזופרימטרית:

נוסח א': מבין כל הצורות במישור, השוות בהיקפן - יש למצוא את הצורה הכולאת שטח מרבי.

נוסח ב': מבין כל הצורות במישור, השוות בשטחן - יש למצוא את הצורה בעלת ההיקף המיזערי.

שני הנוסחים הללו מבקשים לחפש את אותה צורה במישור, שבה היחס בין ההיקף לבין השטח הכלוא יהיה מינימלי.

בעזרת הסבון ובעזרת משחק המשבצות מצאנו שצורה זו היא המעגל.

כאן מתעוררת השאלה: כיצד הסבון "יודע" לפתור בעיה מתמטית כזו?

הסבון איננו "יודע" (אף שזהו בקבוק סבון מלומד, המשתתף אתנו בהדגמות רבות...). התכונה שאנו עושים בה שימוש נקראת אנרגיית פני השטח של קרום הסבון, או מתח הפנים של הקרום. נעסוק בנושא זה בפרק ח', בסעיף "הכוחות בשטח", הדן באלסטיות של קרומי הסבון.

"עַל - חוֹמֹתַיִךְ יְרוּשָׁלַםִ הִפְקַדְתִּי שֹׁמְרִים" (ישעיהו ס"ב 6)

נסו לתכנן את חומות העיר כך ששטח המחיה בעיר יהיה גדול ככל האפשר, אך מעט שומרים יידרשו כדי לשמור על החומות. (האם מוכרות לכם ערי מבצר דמויות מעגל?)

דוגמה פשוטה: נתבונן במשפחת המלבנים, כיוון שקל יחסית לחשב את היקפם ושטחם. נבחר קבוצה חלקית של מלבנים, ונחקור את היחס בין ההיקף לשטח של המלבנים הללו.

נוכל לנקוט דרך המבוססת על נוסח א' או נוסח ב' לבעיה האיזופרימטרית (שהרי הם שקולים).

דומני, שנוח יהיה לעבוד על פי נוסח ב', צורות שוות שטח:

הצורה	אורך	רוחב	שטח	היקף	היחס: שטח/היקף
מלבן	1000	0.1	100	2000.2	20.002
מלבן	100	1	100	202	2.02
מלבן	50	2	100	104	1.04
מלבן	25	4	100	58	0.58
מלבן	20	5	100	50	0.50
מלבן/ריבוע	10	10	100	40	0.40

מסקנה: מבין המלבנים השונים, ככל שהצורה משוכללת יותר (הצלעות דומות יותר זו לזו), כך היחס בין היקף לשטח הולך ופוחת. כלומר דרוש פחות אורך היקף כדי להקיף את אותו שטח.
נוכל לומר כי ההיקף "חסכוני" יותר.
ניתן להכליל את הדיון יותר ולקבוע כי בכל משפחה של מצולעים בעלי מספר צלעות קבוע מתקיים כלל דומה: ככל שהצורה משוכללת יותר, כך פוחת היחס בין היקף לשטח.
ואפשר אף להכליל טענה זו עוד יותר, ולהראות כי מבין המצולעים המשוכללים, ככל שמספר הצלעות גדול יותר כך קטן היחס בין ההיקף לשטח, כלומר ההיקף חסכוני עוד יותר.
והנה המצולעים המשוכללים בעלי מספר צלעות הולך וגדל - מתקרבים יותר ויותר לצורת המעגל - שהוא הפתרון החסכוני ביותר לבעיה האיזופרימטרית - הבעיה של דידו.

הערה דידקטית:
ראוי לשים לב לכך שהתייחסנו לבעיה המתמטית **דרך משקפיים היסטוריים-תרבותיים**. זאת על פי העקרונות שקבענו בסוף פרק ו' בעניין רקע תרבותי-היסטורי.

חלק שני: "דרך המלך" חיפוש המסלולים החסכוניים ביותר במישור

"דרך המלך אין לה שיעור" (בבא בתרא ק').
" [יש] דרך ארוכה וקצרה; [ויש] דרך קצרה וארוכה... " (עירובין נ').
"אין לך דרך שאין בה עקמימות." (ספרי, דברים א: כב).

בעיית השיח' הסעודי

זהו סיפור פתיחה לפרויקט "דרך המלך", במסגרת: "קרוּמי סבּון - וּפִתרוֹן בעיות מתמטיות מהחיים".
בעיה זו אינה מבוססת על סיפור "אמיתי" אלא על משאלת לב: כיוון שנזקקתי לסיפור המחשה, וכיוון שלא נמצא לי סיפור מיתולוגי שכזה - פשוט המצאתי לי סיפור ובניתי אותו לצורכי העניין.

...ואני מקווה שהסיפור ימשיך ויהיה אקטואלי גם בשנים הבאות ...
את הסיפור הזה חיברתי בעידן שבו החל תהליך השלום בין ישראל למדינות ערב. מאז התנדנדה נדנדת השלום, אָנֶה וָאָנָה, לימים טובים ולימים קשים, הלוך ושוב.
אספר את הסיפור בגוף ראשון, כאילו כל זה אירע לי אישית - והקורא ידמה בנפשו כאילו הוא עצמו חווה את כל החוויה הזו - ממש כמוני:

...ובכן, שערו בנפשכם כי יום אחד, בשעת לילה מאוחרת, בשתים אחרי חצות מצלצל הטלפון בביתכם.
כך בדיוק קרה לי ... ובקיצור ... מעשה שהיה - כך היה:
בשתים בלילה - צלצול חזק של טלפון.
אני מבולבל מעט, מתעורר, אולי אף נרגז משהו על השעה הבלתי מקובלת - אך: הטלפון מצלצל - אז עונים.
והנה, מעברו השני של קו הטלפון, מגמגם בעברית עילגת משהו - מציג עצמו אדם הטוען שהוא שֵיְח' סעודי - איל נפט גדול.
אומר השיח': "מזה שנים רבות אני מחכה לרגע הזה להתקשר אליך באופן אישי. מעולם לא נתאפשר הדבר בשל יחסי האיבה ששׂררו בין מדינותינו. אך כעת, עם 'פרוץ השלום' בין ישראל למדינות ערב - אני ממהר להתקשר אליך אישית...."

אני נבוך, קצת מבולבל... בשעה כזו.... זה עתה נרדמתי - והנה העיר אותי הטלפון... אך לא סוגרים טלפון לאיל נפט סעודי.... אני מנסה למחות משהו ואומר: "אבל בשעה כזו???"
השיח' מסביר בחצי פה שרק כעת התפנה מכל הילולות החצר ואלף נשותיו. אך ניגש ישר לעניין: "אתה מבין, אומר לי השיח' הסעודי, זה שנים שאני מבקש ליצור עימך קשר ורק כעת נתאפשר הדבר: הנה גיליתי כי סב-סבי מצד אימי היה בן דוד של סבתא של סבתך מצד אביך - והרי אנו קרובי משפחה ממש." - "ובכן?" ...אני מגמגם משהו מתחת לחוטמי.
"משום כך", ממשיך השיח' הסעודי ואומר, "שמרתי כל השנים מתנה צנועה עבורך מירושת המשפחה. מתנה שלא נתתי לאיש להתקרב אליה - וכעת אני מאושר להעניק לך."
(אם חשבתי לסגור את הטלפון בטריקה קולנית כמחאה על שעות ההתקשרות המוזרות של השיח' - הרי שכאן נגנזו לחלוטין הרהורים אלו.)
אני ממלמל חצאי דברים סתומים שבין "וואלה?!" לבין "אנ'לא מאמין ...", ומנסה לצבוט את לחיי כדי לוודא שכל זה אינו חלום ...

השיח' ממשיך בשלו: "ובכן, החלטתי להעניק לך **שלוש בארות נפט** - כשי צנוע לכבוד קשרי המשפחה שלנו!"

כעת המלמול שלי הופך לבליל שפות יידיש וערבית ועברית בערבוביה גמורה. אינני מוצא מילים להודות לו לשיח'.

והשיח' שכבר עומד לסיים את השיחה (יש לו עוד כמה עיסוקים להערב - והלילה עוד צעיר) רק זורק כמה מילים:

"...אתה שם - בוודאי יש לך ניסיון מסוים בהפקת נפט, לא?"

"לא לא...", אני ממלמל - כמי שעוד לא בדיוק מבין לאן נפל. "בעצם, אינני יודע דבר על הפקת נפט. מה עושים ???"

השיח' מחייך בקורת רוח מעברו השני של הקו, ומסביר במילים קצרות:

"טוב, אז ככה, הבארות נמצאות במרחק של מאה ק"מ זו מזו על פני משולש שווה צלעות, בלב המדבר הסעודי.

כדי להפיק מהן נפט יש להכין מערכת תשתית משוכללת הַמְחַבֶּרֶת את כל שלוש הבארות, וכמובן יש למתוח קו תשתית הישר אל חוף הים. התשתית צריכה לכלול כביש רחב המאפשר העברת ציוד כבד לקידוח וכו'. לצד הכביש יש להכין צנרת עניפה לנפט ולמים, לחשמל ולקווי תקשורת וכו'."

השיח' מסביר כי כאשר שואבים נפט מן האדמה - נוצר שם חלל ריק ויש למלאו בנוזל אחר - פן תתרחש התמוטטות של כל הבאר. נוזל זול וזמין הוא מי הים. לכן יש להניח לצד קו צינורות הנפט גם קו לצינורות מים מן הים אל הבאר.

השיח' מציין כי תשתית כזו יכולה לעלות כמיליון דולר לכל ק"מ ..... (ואני רק חושב על משיכת היתר שלי בבנק ...), אך השיח' מרגיע אותי, כמו קרא את מחשבותי, ואומר: "אל דאגה, כל בנק ישמח להלוות לאיש כמוך כל סכום שתבקש. בשום בנק לא סוגרים את חשבון הבנק של בעל בארות נפט ...".

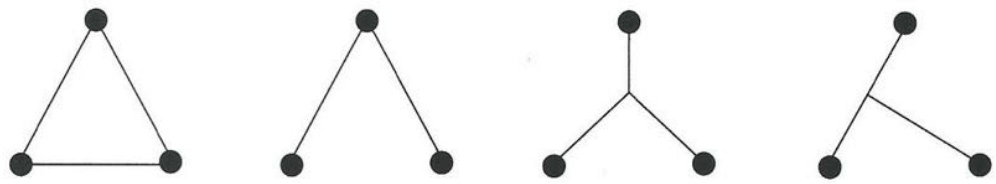
"מה שכן", אומר השיח' הסעודי - "חשוב שתנסה למצוא את המסלול החסכוני ביותר המחבר את שלוש הבארות, שהרי לבזבז כסף לא יפה, ואפשר לתרום את המיליונים שתחסוך לפיתוח הוראת המדעים בישראל, נכון?"

"... ו... יאללהביי...", השיח' סגר את הקו ואני נותרתי עם מחשבותי ....

לישון כבר לא יכולתי. וכל מה שנותר לי כעת, אחרי חצות - לנסות ולפתור את בעיית השיח' הסעודי:

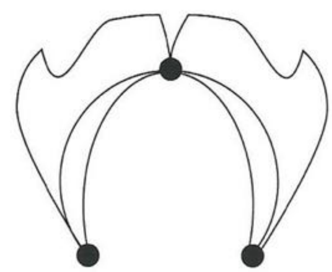
כיצד לחבר במסלול החסכוני ביותר שלוש בארות נפט - על פני משולש שווה צלעות.

ננסה להציע כמה הצעות:



חשוב לשים לב:

לבעיה ייתכנו אינסוף מסלולים המחברים את הבארות.



איך נמצא מבין אינסוף המועמדים - את הפתרון החסכוני ביותר?

אפילו אם ניעזר במחשב-על מהיר ביותר, שייחשב בזה אחר זה את אורך הקו בכל מסלול - הרי גם הוא לא יסיים לעולם לבדוק אינסוף מסלולים שונים.

איך בכלל ניגשים לסוג כזה של בעיות?

נכון, ניחשתם נכון: "נשאל את פי הסבון":

אבל כיצד "שואלים את פי הטבע"?

מה דעתכם?

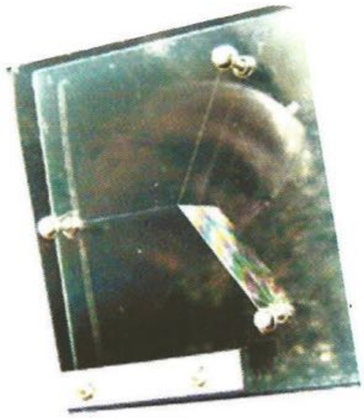
את הטבע שואלים בלשונו: לשון התצפית והניסוי.

יש לבנות "כריך" המתאים לתיאור הבעיה הנדונה ו... לטבול אותו במי הסבון...

כיצד בונים "כריכי סבון"?

בפרק ט', "יצירה לסבון ולצבע", נתאר את פרטי מלאכת הבנייה של המתקנים, השיקולים וההמלצות.

שם גם נביא הנחיות והמלצות להכנה של תמיסת הסבון.



הנה הפתרונות שהסבון מוצא:

א. מסלול דמוי אוהל Λ או דמוי האות V , או $<$, $>$ (מדוע אין צורך לסגור את Δ המשולש?)

הרי הפתרונות הפתוחים כבר עונים על הבעיה, ולכן אין צורך לסגור את המשולש.

ב. מסלול דמוי Y, ⅄ ☮ הסמל של מרצדס או סמל השלום.

שימו לב:

1. ניתן לזעזע את המערכת בניעור חזק או על ידי נשיפה של רוח או על ידי הפעלת "כוח פיזי מתון" ביד (כשהיא רטובה במי סבון). **זעזוע כזה של המערכת יכול לגרום לה לעבור מפתרון אחד למשנהו.**
2. בפתרון הראשון הסבון מחבר ישר את קדקודי המשולש (אין צמתים).
   בפתרון השני נוצרה נקודת צומת מיוחדת באמצע המשולש שווה הצלעות (יש נקודת צומת אחת).

עולות בנו כמה וכמה שאלות לבירור.
נסו להציע שאלות לדיון.

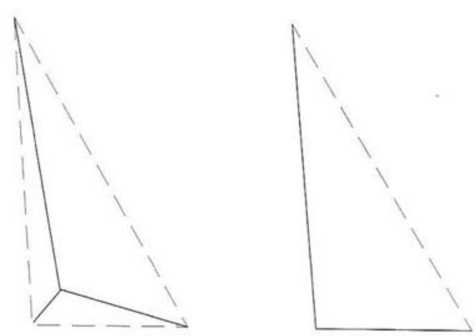
- אם הסבון מוצא את המסלול החסכוני ביותר, מדוע הוא מצא שני פתרונות שונים זה מזה? הרי ציפינו לקבל פתרון אופטימלי יחיד?
- במשולש שווה צלעות, טבעי היה לצפות שאם תיווצר נקודת צומת נוספת היא תהיה במרכז. אך מה יקרה במשולש רגיל שאינו כל כך משוכלל? היכן תהיה אז נקודת הצומת?

- מה מייחד את נקודת הצומת הזו? האם זו אחת מן "הנקודות המיוחדות במשולש" שלמדנו בהנדסה? (כמו: נקודת מפגש האנכים [הגבהים], נקודת מפגש חוצי הזווית וכו').
- האם ניתן "לשכנע" את הסבון "בכוח" ולכפות עליו פתרונות אחרים? למשל פתרון דמוי T , ⊥ ?

שאלות אלו ואחרות מצדיקות חקירה ועיון נוסף.
נבנה מודלים נוספים של "כריכי סבון" על מנת לנסות ולבדוק מקרים נוספים.

הערה לשונית: צומת, בלשון **זכר**, הוא קיצור של צומת-דרכים, פרשת-דרכים, מקום-חיבור, קשר. מקום הצטלבות של דרכים שונות. (בריבוי: צְמָתִים, בסמיכות: צומתי-ללא ניקוד). בכתיב מנוקד: צֹמֶת.

נחזור לבעיית השיח' הסעודי:
נבדוק מקרה פחות משוכלל: משולש כלשהו (בלתי משוכלל) של בארות נפט.
(שהרי - לא היינו מסרבים למתנתו של השיח' הסעודי רק משום שהבארות אינן ממוקמות בדיוק על פני משולש שווה צלעות, נכון?)
הבעיה: רוצים למצוא את המסלול החסכוני ביותר המחבר את קדקודיו של **משולש כלשהו**.



נסו לנסח במילים שלכם את המאפיין והמשותף לפתרונות שהסבון מוצא.
שוב מסתמנת תמונה דומה, במשולש כלשהו:

1. ***ישנם פתרונות שונים***, ניתן לחלקם **לשתי משפחות של פתרונות**:
   א. פתרונות ללא צמתים (בעלי 0 צמתים). כמה נציגים יש למשפחה זו? האם הם זהים?
   ב. פתרונות בעלי נקודת צומת אחת.
2. ניתן לזעזע את המערכת ולגרום לה לעבור מפתרון אחד למשנהו, ואף ממשפחה של פתרונות למשפחה אחרת.

3. כאשר נוצר צומת, הוא מקיים תמיד את הכלל הבא:

שלוש קרניים נפגשות בנקודה אחת, בזוויות שוות (120^o).

לפני כמאה וחמישים שנה חקר המתמטיקאי השוויצרי יעקוב שטינר (Jakob Steiner, 1796-1863) בעיות במישור שעניינן: חיפוש מסלול חסכוני ביותר בין קדקודי מצולעים שונים.

במחקריו העיוניים מצא שְטַיְנֶר כי הפתרון האופטימלי יושג על ידי היווצרות צמתים מן הסוג שתיארנו לעיל.

מכאן והלאה נכנה צמתים אלו "**צומתי שְטַיְנֶר**" לכבודו של אותו מתמטיקאי.

ננסח כאן ניסוח ראשוני **למשפט שטינר, חלק א'**:

בבעיות במישור, כאשר מחפשים את המסלול החסכוני ביותר המחבר את קדקודיו של מצולע כלשהו בעל n קדקודים, ***ייתכנו*** נקודות צומת המקיימות את המשפט:

כל צומת שְטַיְנֶר בנוי משלוש קרניים, הנפגשות בנקודה אחת, בזוויות שוות (120^o).

שימו לב! המילה: "ייתכנו" מצביעה על כך שאין זה הכרחי שיהיו צמתים. אפשר שמספר הצמתים יהיה אפס.

מה שקובע המשפט המתמטי הנ"ל הוא, כי אם יהיו צמתים - עליהם לקיים את טענת המשפט.

סימן זיכרון:

צומת שְטַיְנֶר מזכיר מעט את האות העברית ƛ, ויותר מכך דומה האות האנגלית Y לצורת מפגש הקרניים בצומת.

הכי קרוב הוא אולי סמל השלום או הסמל של חברת המכוניות מרצדס, או סימן האזהרה הבינלאומי לחומרים רדיואקטיביים: סכנת קרינה!

צורת כף היד מזכירה במשהו את צומת שטינר.

בהמשך, ננסח גם את חלקו השני של משפט שטינר.

מעניין לציין כי בעיה זו של שטינר היא בעיה מתקדמת ביותר במתמטיקה, בתחום תורת הגרפים, תחום שעד היום הוא שדה פורה ומתפתח שעדיין ממשיכים לחוקרו במתמטיקה המודרנית. תחום זה נלמד ונחקר באוניברסיטאות, במסלול לתואר שלישי ומעלה.

הודות לכלים שלנו והודות לתכונות הסבון, אנו יכולים להביא בפני ילדים צעירים מאוד (בבית הספר היסודי, בחטיבת הביניים ובחטיבה העליונה) רעיונות מתקדמים ביותר מן המתמטיקה הגבוהה.

הפרויקט הזה מראה לנו כי **נושא קרומי הסבון הוא שדה מספיק מעניין**, שבו ניצבות בפנינו תעלומות רבות למחקר ולגילוי.

זו דוגמה מעולה לעיקרון הבסיסי בדרך בית היוצר: הפרויקט צריך להיות **מספיק פשוט אך גם מספיק מעניין**.

אמנם, החומרים שאנו עובדים בהם, מים וסבון, נראים מוכרים וידועים לכול, אך בשלב הזה מסכימים רבים, כי הסבון מזמן לנו עולם עשיר של בעיות מרתקות: מספיק פשוט מצד אחד - ומספיק מעניין מאידך.

כיצד מודדים זוויות בין קרומי הסבון?

מתעוררות כמה בעיות במדידה:

מד הזווית אינו יכול להיכנס אל תוך כריכי הסבון ואי אפשר למדוד באמצעותו.

הסבון מתבקע מיד כשנוגע בו חפץ זר.

בעבודה עם ילדים צעירים, בבית הספר היסודי, מתעוררת בעיה נוספת:

הילדים טרם למדו מהי זווית וכיצד למדוד זוויות במד זווית.

לשם כך פיתחתי מדי זווית לסבון - יריעות פלסטיות הגזורות במידות מוכנות מראש: ניתן לבדוק מי מהן מתאימה לזווית הנמדדת.

אפשר להרטיבן במי סבון - ואז אינן מבקעות את הסבון.

גם מי שאינו יודע למדוד זוויות ואף אינו יודע לציין זוויות במעלות - יכול להבחין בנקל כי הזווית המיוחדת שלנו כאן היא שליש מעגל.

זוויות בגודל זה אני מכין מפלסטיק בעל צבע קבוע: למשל, צהוב מציין זווית של שליש מעגל (120°).

קל להיווכח כי אותה זווית נמדדת מכל הכיוונים של צומת שטינר.

פעילות: מכינים מד זווית שטינר.

קחו גיליון פלסטי צבעוני וסרטטו עליו עיגול ברדיוס של כ-7 ס"מ.

במרכז העיגול סמנו זווית של 120° וחלקו את ה"עוגה" לשלוש גזרות שוות.

גיזרו את העיגול לשלוש גזרות על פי הסימון.

קיבלנו שלושה מדי זווית שטינר- לזווית של 120°.

דיון - הנקודות המיוחדות במשולש (מיועד לתלמידי החטיבה העליונה ומעלה)

בלימודי הגיאומטריה - הנדסת המישור, אנו לומדים להכיר ארבע נקודות מיוחדות במשולש:

1. נקודת מפגש האנכים האמצעיים. נקודה זו היא **מרכז המעגל החוסם** את המשולש.
2. נקודת מפגש חוצי הזוויות. נקודה זו היא **מרכז המעגל החסום** במשולש.

3. נקודת מפגש האנכים (הגבהים). לנקודה זו קוראים **אורתוצנטרום** (Orthocentrum) של המשולש.
4. נקודת מפגש התיכונים. נקודה זו היא מרכז הכובד של המשולש.

ראו מידע נוסף על ארבע הנקודות המיוחדות במשולש - ברשימת המקורות בסוף פרק זה.

ובכן, נקודת צומת שטינר איננה אף לא אחת מן הנקודות המיוחדות הללו.
מצאנו נקודה מיוחדת חמישית במשולש!
זו תגלית אדירה שאיננה נלמדת עד היום בתכנית הלימודים במתמטיקה!
כאשר מורי המתמטיקה יכירו את "כלי העבודה" שלנו בסבון - הם יראו לתלמידיהם גם את הנקודה הזו.

ליתר דיוק, ננסח את הטענה של שטיינר לגבי משולשים, כך:

אם במשולש ABC כל הזוויות קטנות ממש מ - 120^0,
אזי קיימת נקודה פנימית בתוך המשולש, נסמנה S,
ממנה רואים את כל צלעות המשולש בזווית ראייה של 120^0,
והמסלול הקצר ביותר המחבר את קדקודי המשולש הוא: $AS+BS+CS$.

מאידך, אם קיימת במשולש זווית הגדולה מ-120^0 או שווה ל-120^0, אזי המסלול החסכוני ביותר המחבר את קדקודי המשולש עובר לאורך שוקיה של הזווית הזו (על שתי הצלעות הקטנות במשולש).
*כלומר במקרה זה **אין** נקודת צומת פנימית S כזו בתוך המשולש, ומספר צומתי שטינר במקרה זה יהיה אפס.*

דיון: מדוע ישנם כמה פתרונות "אופטימליים"?
מנחה מנוסה יכול לפתח דיון כזה גם עם ילדים בכיתות הגבוהות של בית הספר היסודי, עם תלמידי חטיבת הביניים ותלמידי החטיבה העליונה.
בצדק יכול לטעון מישהו: אם הסבון כל כך "חכם", מדוע הוא מוצא **כמה פתרונות** אופטימליים (מיטביים) כביכול, בעוד **שרק אחד מהם הוא** באמת האופטימלי, החסכוני ביותר?

אנסה לדון בשאלה מתוך אנלוגיה לבעיה אחרת. בהמשך נברר מהו הדמיון בין המקרים. דמו בנפשכם שאנו יוצאים עם הילדים למשחק "גולות" בחצר. ברור שיש למצוא

מקום מתאים של קרקע גלית קשה, אך בשום אופן לא חלקה כמו רצפה של חדר. בקרקע יש הרים וגבעות, גאיות ועמקים, בורות ושקערוריות למיניהן.
הנה מתחיל המשחק: כל אחד משליך את הגולה שלו למשטח המשחק. כל גולה נעה לה "בין הרים ובין גבעות...", עולה ויורדת, עד שהיא מאיטה באזור מסוים, ובאותו אזור, בסביבתה הקרובה, היא מוצאת את הנקודה הנמוכה ביותר ומתייצבת בה. כעת, אם הקרקע תרעד קלות, הגולה תזוז אולי בתנודות קטנות, אך תחזור ותתייצב בנקודה הנמוכה ביותר בסביבתה. (לנקודה כזו קוראים המתמטיקאים נקודת מינימום מקומית - לוקלית.)
הגולות מצאו את הנקודות הנמוכות ביותר בסביבה הקרובה למקום שאליו נקלעו בסוף דרכן.
הגולות, כמו כולנו על פני כדור הארץ, נתונות תחת השפעת כוח הכובד. השפעה זו גורמת לכך שעל מנת לעלות לגובה עלינו להשקיע אנרגיה. אנרגיה זו הופכת לאנרגיה של גובה (אנרגיה פוטנציאלית של כובד).
כשאני עולה במדרגות אני מתאמץ, מתנשם, מזיע ו"שורף" הרבה קלוריות. חלק מהאנרגיה שקיבלתי במזון הפכה לאנרגיה של גובה.
כשאני גולש על גלגליות במורד הרחוב, אני מנצל את אנרגיית הגובה שהייתה לי במרומי הרחוב - והופך אותה לאנרגיה של תנועה. כך אני נהנה מהגברת המהירות בלא תוספת מאמץ.
בטבע מתגלה לנו שאיפה או נטייה של כל הגופים והמערכות להימצא במצב של אנרגיה נמוכה ככל האפשר.
משום כך נופלות הגולות במשחק שלנו לאזורים הנמוכים ביותר בסביבתן. שם הן נשארות כל עוד לא פעלו כוחות חיצוניים והוציאו אותן משם.

מערכת קרומי הסבון שלנו דומה בכמה מובנים למערכת הגולות על משטח המשחקים. קרומי הסבון הם קרומים אלסטיים, קפיציים, הדומים לקרומים של בלון שאנו משחקים בו.
אם רצונכם לנפח את הבלון, עליכם להשקיע מאמץ רב בניפוחו. בעת הניפוח אתם משקיעים אנרגיה של דחיסת האוויר בבלון, ועל ידי כך אתם מותחים את קרום הגומי של הבלון. בקרום הבלון, כמו בגומי או בקפיץ: יש להשקיע אנרגיה כדי למתחו.
כאשר נרפה - הוא ישתנה במגמה להתכווץ ככל האפשר ולרדת לרמת אנרגיה נמוכה יותר.

ככל ששטח הקרום הקפיצי (קרום הבלון האלסטי או קרום הסבון) גדול יותר - כך אגורה בו אנרגיה רבה יותר. (שטח גדול של קרום אלסטי - שקול לאוסף קפיצים גדול יותר. כדי למתוח קפיצים רבים יותר - מושקעת יותר אנרגיה.)
הקרום ה"שואף" או הנוטה לרדת לרמת אנרגיה נמוכה יותר, "ישאף" להתכווץ ולהקטין את שטחו.

ממש כפי שהגולות "שאפו" (נטו, גילו נטייה) לרדת למקומות הנמוכים ביותר (ובכך הקטינו את אנרגיית הגובה שלהן), כך גם קרום הסבון "שואף" למצוא את המצבים שבהם שטחו הכולל יהיה מזערי (ובכך יקטין את אנרגיית האלסטיות שלו).
כזכור, הנקודות במגרש המשחקים שהגולות התייצבו בהן הן האזורים **הנמוכים ביותר בסביבתן הקרובה**. קראנו לנקודות אלו: נקודות מינימום מקומי (לוקלי).
כך גם קרום הסבון מוצא את **המצבים החסכוניים ביותר "בקרבת" המצב שבו הוא נמצא**. זהו מינימום מקומי.
כלומר, משטח הסבון מוצא את הסידור האופטימלי, שבו שטח יריעת הסבון יהיה החסכוני ביותר האפשרי, באותה סביבת מצבים שבה הקרום נתון.
כאשר קרום הסבון נפרס בתוך כריכי הסבון, בעלי מרווח קבוע, הרי הסידור בעל שטח הקרום המזערי הוא גם הסידור בעל אורך הקו המזערי. שהרי:

שטח הקרום = אורך הקו x מרווח הכריך (קבוע).

משום כך קרום הסבון מסרטט את המסלולים החסכוניים יותר מכל המסלולים שדומים להם ונראים "קרובים" אליהם.
מבין מצבי המינימום המקומי עלינו לברור את אלה הרצויים לנו. כלומר, מבין המסלולים החסכוניים שהסבון מצביע עליהם - אנו יכולים לבחור את אותם מסלולים שעונים לדרישותינו.
בכך סייע לנו הסבון לחפש את המסלולים החסכוניים ביותר. מתוך ים אינסופי של מסלולים אפשריים - שלעולם לא היינו יכולים להספיק לבדוק את כולו - הסבון הצביע על מספר סופי וקטן מאוד של מסלולים חסכוניים ביותר!

אנו משתמשים בנטייתו של קרום הסבון להימצא במצב של שטח מזערי - כדי לפתור בעיות מתמטיות מן החיים. זהו סוד פעולתו של הסבון - בפתרון בעיות מתמטיות מן החיים!

ואכן, ממש כפי שרעידת אדמה חזקה יכולה לנער את הגולות ולגרום להן לצאת מנקודת מינימום מקומית אחת לאזור אחר לחלוטין, ושם למצוא מינימום מקומי חדש - כך יתנהג גם הסבון. זעזועים קטנים רק ירעידו אותו קלות והוא ישוב ויתייצב באותו מצב. אבל זעזוע חזק יכול לגרום לו לעבור ממצב חסכוני אחד למשנהו.

לסיכום הדיון:

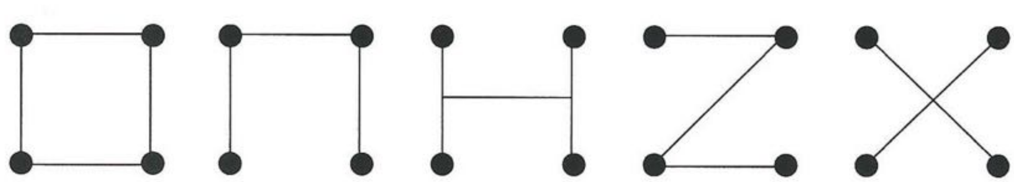
הסבון (כמו הגולות) מוצא את המינימום המקומי (לוקלי) של שטח קרום הסבון.
כאשר אנו מביטים מלמעלה על כריכי הסבון - מינימום של שטח הקרום נראה לנו כמינימום של אורך המסלול המחבר את קדקודי המצולע.
מבין כל המצבים החסכוניים שמצא הסבון עלינו לברור את המצב החסכוני ביותר.
עדיין יש תועלת רבה מאוד בשימוש בסבון: במקום לנסות ולברור פתרון יחיד מתוך אינסוף אפשרויות - הסבון מאפשר לנו לברור פתרון חסכוני ביותר מבין קבוצה קטנה מאוד של פתרונות חסכוניים שהוא מצא!

ויהי אחר הדברים הללו, שוב, בשתיים בלילה צלצול של טלפון... השיח' הסעודי על הקו.

"שמעתי" - אומר השיח' - "כי פתרת את בעיית שלוש הבארות פתרון מתמטי כל כך יפה, לכן החלטתי להוסיף ולתת לך באר נפט רביעית." אמר השיח' ולא יסף.
ושוב, נשארנו ערים מאוחר בלילה לברר:
מהו המסלול החסכוני ביותר המחבר ארבעה קדקודים (לעת עתה נניח כי הם מסודרים על פני מרובע משוכלל: ריבוע).
...שהרי לא יעלה על הדעת לסרב לקבל באר נפט רביעית - רק משום שצריך להשקיע מעט מחשבה נוספת...
נסו להציע פתרונות:

- פתרון בצורת האות ח (מדוע אין צורך בפתרון דמוי האות: ם או □?)
- פתרון בצורת ✕ ✛ (האם הוא מקיים את טענת משפט שטינר?)
- פתרון דמוי האות H (האם הוא מקיים את טענת משפט שטינר?)
- פתרון דמוי האותיות: Z , N (האם הוא עדיף על פתרון דמוי ח ?)
- פתרונות אפשריים נוספים???

וכמובן "נשאל את פי הטבע" על ידי ניסוי במודל מתאים של כריכי הסבון:
כזכור, אנו מאפיינים את הפתרונות השונים על פי חלוקה למשפחות.
אנו מגדירים **"משפחה של פתרונות"**: קבוצת פתרונות של מסלולים אפשריים שונים, בעלי אותו מספר של צומתי שטינר.



הפעם (במרובע כלשהו, ובייחוד בריבוע) מתברר כי ישנן שלוש משפחות של פתרונות:

א. משפחת בעלי 0 צומתי שטינר: ח , כ , U , C . (מדוע N , Z אינם חברים ראויים במשפחה?)

ב. משפחת הפתרונות בעלי 1 צומת שטינר: צ , מ (מדוע X אינו חבר ראוי במשפחה?)

ג. משפחת הפתרונות בעלי 2 צומתי שטינר: >—< (מדוע H אינו חבר ראוי במשפחה?)

נדון בכל שלוש המשפחות הללו. לכל פתרון אפשרי יש לבדוק אם הוא מקיים את משפט שטינר!

בסעיף א' שאלנו מדוע N , Z אינם חברים ראויים במשפחת הפתרונות בעלי 0 צומתי שטינר.

כדי לענות על כך, נבדוק אם פתרונות אלו הם חסכוניים בהשוואה לפתרונות דמויי האות ח?

קל להשתכנע כי הפתרונות דמויי N , Z **אינם חסכוניים**, משום שחיבור אלכסוני בין שתי הצלעות המקבילות ארוך יותר מחיבור על ידי צלע נוספת (כזכור, בריבוע - האלכסון גדול מכל צלע).

בסעיף ב' שאלנו מדוע X אינו חבר ראוי במשפחת הפתרונות בעלי 1 צומת שטינר?

גם כאן, יש לבדוק אם משפט שטינר מתקיים בפתרון זה.

כאן נפגשות ארבע קרניים בנקודת הצומת - בניגוד לקביעה של משפט שטינר (שלוש קרניים נפגשות בנקודת הצומת...) .

בסעיף ג' שאלנו מדוע H אינו חבר ראוי במשפחת הפתרונות בעלי שני צומתי שטינר?

ושוב, גם כאן, יש לבדוק אם משפט שטינר מתקיים בפתרון זה.

הפתרון דמוי H אינו מקיים את דרישת שטינר (בכל צומת שטינר נפגשות שלוש קרניים בזוויות שוות).

נשוב ונעיין במשפחת הפתרונות בעלי שני צומתי שטינר: >—<

מעניין לנסות לקרב את שני הצמתים זה לזה "בכוח" על ידי נשיפה עדינה ולקבל מצב דמוי X, מה קורה?

האם מצב כזה הוא חסכוני או בזבזני כל כך עד שהסבון ממהר להתרחק ממנו?

האם מצב כזה מקיים את משפט שטינר?

מעניין לבדוק גם מודלים של כריכי סבון עבור מרובעים אחרים, שאינם משוכללים כמו הריבוע.

מה קורה במלבן? מה קורה במקבילית? בטרפז?

לפני שנעבור למצולעים הבאים, ננסה לברר אם ניתן להכליל את תוצאות מחקרנו מן המקרה של משולש ומרובע?

ראינו כי במשולש תיתכנה רק שתי משפחות שונות של פתרונות:

א. משפחת הפתרונות בעלי 0 צומתי שטינר.

ב. משפחת הפתרונות בעלי 1 צומת שטינר.

ובמרובע:

א. משפחת הפתרונות בעלי 0 צומתי שטינר.

ב. משפחת הפתרונות בעלי 1 צומת שטינר.

ג. משפחת הפתרונות בעלי 2 צומתי שטינר.

ובכן???

האם יש קשר בין מספר הקדקודים במצולע לבין מספר המשפחות של הפתרונות?

כזכור, משפחה של פתרונות מאופיינת על ידי מספר קבוע של צומתי שטינר בכל נציגיה.

נארגן את המידע שנאסף עד כה בטבלה, כך שנוכל להוסיף ולעדכן את הטבלה גם בהמשך, ואף להסיק מסקנות ולנבא את ההתנהגות במקרים שטרם בדקנו.

הערה: טבלה ריקה כזו העמדתי בפני ילדים בבית ספר יסודי.

הם ביצעו עבודת חקר על פי כרטיסי הדרכה - ואלו תוצאות מחקרם!

שימו לב לכך שלא תיכנס בועת אוויר לתוך כריך הסבון. מקרה כזה שונה מבעיית שטינר שבה טיפלנו כאן.

אפיון משפחות הפתרונות - על פי מספר צומתי שטינר

כתלות במספר הקדקודים במצולע

המצולע	מס' קדקודים n	אפיון משפחות הפתרונות על פי מספר צומתי שטינר
משולש	3	0 צמתים (דמוי V), 1 צומת (דמוי Y)
מרובע	4	0 (דמוי ח), 1 (דמוי צ, מ), 2 (דמוי <->)
מחומש	5	0, 1, 2, 3
משושה	6	0, 1, 2, 3, 4 (כאן ממתינה לנו הפתעה!)
ניבוי כללי	n	0, 1, ... , (n-2)

למעשה חשפנו את **חלקו השני של משפט שטינר**:

במצולע בעל n קדקודים ייתכנו פתרונות בעלי: 0 , 1 , ... , (n-2) צומתי שטינר.

במשושה מתעוררת בעיה:

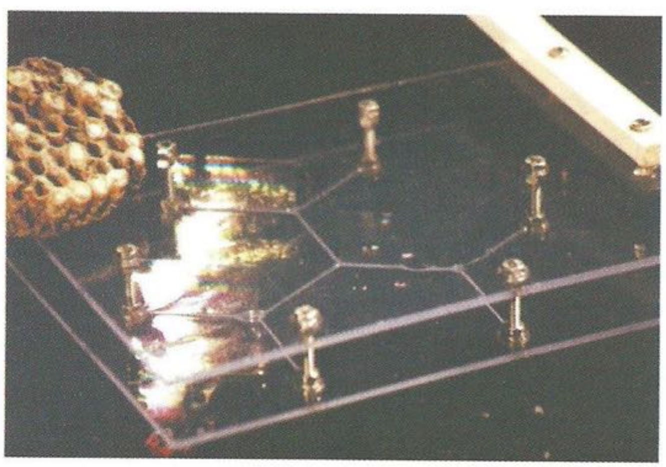
לכאורה, ניתן להגיע לרגע קט לכל ארבעת הצמתים האפשריים. אבל עד מהרה הצמתים "גולשים" החוצה לעבר הקדקודים ונטמעים שם. הא כיצד?

בדקו את הזווית בין שוקי המשושה. האם היא כבר מקיימת את משפט שטינר?

אם כן, המשושה מקיים את משפט שטינר כמות שהוא.

(נרחיב על כך יותר בפרק ח', שם נזכיר את חלת הדבש של הדבורים!)

אף על פי כן, נוכל להתחכם מעט ולהגיע למצבים יציבים שבהם נשארים הצמתים ללא גלישה: מאחד ועד ארבעה צמתים במשושה!



🕮 סיפור מקרה: לילך מכיתה ו' מפריכה את משפט שטינר (כמעט)!

לפני שנים אחדות פנתה אלי אֶתי, מנהלת בית הספר היסודי ביישוב שלי, וביקשה שאתגייס לתרום תרומה מדעית למרכז הלימודי שהיא מקימה בבית הספר. אני הייתי באותה עת מורה לפיזיקה בבית הספר התיכון האזורי ותלמיד בחוג לפיזיקה באוניברסיטה. ידעתי איך פונים לתלמידי תיכון - אך מאוד חששתי לבנות פרויקט בפיזיקה לתלמידי בית הספר היסודי. אתי לא הניחה לי להימלט וגייסה אותי, למרות הכול, להירתם למשימה.

הקמתי בבית הספר בוסתן - פינת מדעים שהלכה והתרחבה. הפרויקט הראשון היה "קרומי סבון - ופתרון בעיות מתמטיות מן החיים". נהגנו לעבוד ולפתח את הפינות המדעיות כך: בסוף שבוע אני כותב ובונה את החלק הבא, ובמהלך השבוע שאחרי כן, הילדים מתנסים בעבודת החקר בהדרכתה של אֶתי. וכך מדי פעם הייתה אֶתי עולה על בעיה שהילדים נתקלים בה - ואני הייתי מבאר, מפרט ומבהיר את הדברים.

היה זה יום שישי אביבי אחד, אני יורד מהאוטובוס שבו נסעתי מהאוניברסיטה בירושלים - הביתה ליישוב.

אֶתי פוגשת אותי על המדרכה - נסערת ונרגשת: "עמוס, אל תשאל מה שקרה היום במרכז הלימודי!"

"ובכן" - אני שואל? ואתי מספרת: "לילך - אחת הבנות המוכשרות ביותר בכיתה ו' - עבדה עם מתקני הסבון וגילתה כי משפט שטינר אינו נכון! ... ". שוד ושבר. כמעט ונפלו עלינו השמים.

מיהרנו אל המרכז הלימודי. אתי הראתה לי את מתקני הסבון - וביצעה לפניי את הפעולות שעשתה לילך.

ואכן נתקבל קרום של סבון ובו לכודה בועת סבון סגורה. מספר הצמתים כעת היה שונה מזה שמנבא משפט שטינר.

נשמתי לרווחה... "זה בסדר," אמרתי, "משפט שטינר מתייחס לקרום פתוח ללא בועה סגורה, אם נבקע את הבועה - נקבל שוב את אחד הפתרונות המקיימים את משפט שטינר."

החלטנו להוסיף ברשימת ההנחיות לילדים אזהרה, לבל יִלְכְּדוּ בועה סגורה בתוך מתקן הסבון.

לאחר זמן - שבתי וחשבתי על האירוע של לילך ומשפט שטינר.

בעצם, מגיע אות של כבוד ללילך הצעירה והנבונה מכיתה ו' על כך שהעזה לבחון

בביקורתיות וללא משוא פנים את משפט שטינר. וכאשר הממצאים לא עמדו במבחן הביקורת - העזה לילך לקרוא: "מצאתי מצאתי!" - הנה סתירה למשפט שטינר.
ובעצם, אולי מגיע ציון לשבח גם לצוות ההוראה שחינך אותה לפתיחות ולביקורתיות - מבלי להיכנע למוסכמות ולדוגמות המקובלות. אולי, נכון לומר כי דרך העבודה הזו בפרויקט הסבון היא הדרך שנתנה בידיה של לילך **כלים מתאימים לגילה וליכולותיה** - לבחון בהם את משפט שטינר בחינה אמיתית ויסודית.
ולילך, כמו אותו ילד בבגדי המלך החדשים, קראה: "המלך הוא ערום!"
האם היה סטודנט באוניברסיטה, בתואר שלישי במתמטיקה, מעז לחלוק על קביעותיו של פרופ' שטינר המהולל?
תלמידת כיתה ו' - העזה.
הנה כי כן - יש כאן בפרויקט הסבון, הניחוח המיוחד של שדה פעילות פורה **לפיתוח החשיבה** של הילדים, שדה המקיים את הדרישה היסודית שלנו: "מספיק פשוט - ומספיק מעניין!"

לסיום, רק נדגיש כי משפט שטינר נשאר תקף כשהיה.
בהמחשת המשפט באמצעות קרומי סבון - יש להקפיד על כך שלא תילכד בועת סבון סגורה בתוך המתקן.

פתרון בעיות מתמטיות מן החיים

יש מקום לכמה וכמה הערות. נביא אחדות מהן וננסה להשיב על חלקן.

הערה 1

ההבטחה בכותרת: "פתרון בעיות מתמטיות מן החיים" - הצניעה בחובה כלים לפתרון בעיות שאנו נתקלים בהן בחיי יום יום.
איפה בחיים פוגשים נסיכה פיניקית, שיודעת לצוד שור בר ולהכין מעורו רצועה?
וחוץ מזה... לא חבל על השוורים?...
והיכן מוצאים שיח'ים סעודים המחלקים בארות נפט?
לכאורה, יכול מישהו לבוא ולטעון: הבל הבלים - הכול הבל! אין בעיות כאלו בחיי היום יום.

תשובה אפשרית להערה מס' 1:

סיפור המסגרת נועד להמחיש את הישימות של הבעיה המתמטית ופתרונה. כלומר הסיפור מצביע על אפשרות סבירה שבה בעיה מסוג זה עלולה להתעורר, וכיצד ניתן לטפל בה ולחפש לה פתרונות.

כל עוד ניתן, אני מעדיף להביא רקע תרבותי והיסטורי אותנטי כמו סיפור מיתולוגי.
ולעצם העניין: בבעיה של דידו אנו עשויים להיתקל בהקשרים שונים. למשל ראו את התרחיש הבא.

כיתת ילדים יוצאת לטבע לסיור לימודי הכולל גם חניית לילה ולינה בשטח. כיוון שהתלמידים והמחנכים אמורים ללון בשטח פתוח, עליהם להתארגן במחנה ללילה. מנהל בית הספר מקפיד מאוד על בטיחות המטיילים ומבקש לְתַחוֹם את אזור הלינה של הילדים בגדר בטיחות. בצדק רב חושש המנהל, שבלילה ייסע רכב בשטח הפתוח וידרוס את הלנים במחנה.

משום כך הוא מצייד את הקבוצה בסרט זוהר מיוחד (ויקר מאוד), באורך של 100 מטר.

כיצד יתארגנו המטיילים לחניון לילה מוקף בסרט הזוהר - כך ששטח המחנה יהיה מרבי ויאפשר נוחות והתארגנות?

הנה זו בדיוק הבעיה של דידו.

סיפור השיח' הסעודי מעורר בדיוק את אותה בעיה שמעלה התרחיש הבא:
בית ספר מבקש להקים מדרכה חדשה, אשר תחבר את המעבדה למדעים עם הספרייה ועם המרכז לאומנויות.
אבל תקציבו של בית הספר זעום ביותר. רק הצעה חסכונית ביותר תתקבל ותבוצע.
מהו המסלול החסכוני ביותר המחבר את שלושת האתרים הללו?

הערה 2

פתרון בעיית השיח' הסעודי מניח כי המדבר הסעודי ריק למדיי ואין בו מכשולים משום סוג.
אבל, במציאות הישראלית, הצפופה כל כך - איך ניתן לדמיין שנוכל להעביר כביש או קו צינורות במסלול המתמטי האידאלי? הרי בכל מקום שתנסה לסרטט על המפה קו בין שתי נקודות - מיד יתברר כי הקו עובר בבית קברות יהודי או בשטחי האוטונומיה או באזור שהוא רכוש הכנסייה הקתולית, ואם לא די בכך הרי השטח מיועד לשמורת טבע וחלקו מתוכנן להיות קניון גדול... קיצורו של דבר - בחיים יש **אילוצים**.

האם הסבון יכול לסייע לנו בפתרון בעיות עם אילוצים?

תשובה להערה 2:

אנו יכולים לתכנן מודלים שבעזרתם יוכל הסבון לפתור לנו בעיות מתמטיות עם אילוצים.

אני מציע כאן **להבחין בין שני סוגים עיקריים של אילוצים**.

אילוצים המאופיינים כ**איסור** ואילוצים המאופיינים ב**מחיר**.

נתבונן בשני הסוגים האלה:

א. אילוץ מהסוג הראשון: איסור

אנו רוצים לחבר כמה יישובים בכביש חדש, במסלול החסכוני ביותר האפשרי, אך **אסור** לנו לעבור בכל האזורים המגודרים.

שימו לב: במובן מסוים - **האיסור** הוא אילוץ פשוט וברור: אסור וגמרנו!

אין מקום למשא ומתן, ולכן גם אין צורך להתלבט: פשוט אסור לנו לעבור כאן.

השאלה העומדת בפנינו כעת היא אם כן:

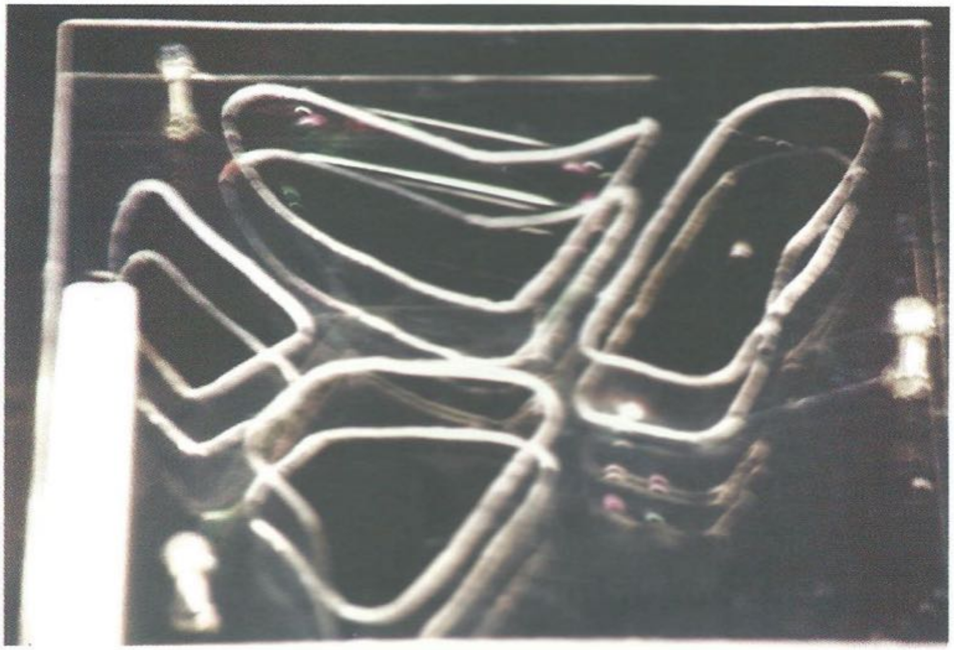
מבין כל המסלולים העומדים בתנאי האיסור, איזה הוא המסלול החסכוני ביותר?

נבנה מודל של כריך סבון בקנה מידה המבוסס על המפה המדויקת של השטח.

נסיר מן הדגם את האזורים המגודרים וניצור חורים במודל.

כאשר נטבול את הדגם בסבון נקבל את הפתרון המבוקש: המסלול החסכוני ביותר המחבר את היישובים תוך שהוא מקיף את האזורים המגודרים - האסורים.

חשוב לציין כי טיפול אנליטי בבעיות פיזיקליות שבהן פועלים אילוצים הוא סבוך מאוד, ומתבצע בעמל רב בלימודי פיזיקה ומתמטיקה בתואר ראשון באוניברסיטה ואף בקורסים גבוהים יותר. הדרך שאנו מציגים כאן מאפשרת ללומדים בבית הספר בכל הגילים, להתנסות במו ידיהם ולחוש כיצד ניתן לטפל באילוצים מסוגים שונים - ללא כאבים וללא התסכול הרב המלווה עבודת חישוב מפרכת.



פתרון לבעיה עם אילוץ מסוג ראשון: קרומי סבון מקיפים את האזורים האסורים

ב. *אילוץ מהסוג השני: מחיר*

האילוץ מן הסוג הראשון הוא נוקשה יותר, אך עם זאת פשוט יותר לטיפול: "איסור - זה איסור" - וגמרנו.

אין מקום לשיקול דעת נוסף. צריך לציית לאיסור ולעבור מחוץ לאזור המגודר.

לא כך הוא האילוץ מהסוג השני. כאן הכול מותר אך **לכל החלטה יש מחיר**. (האם זה נשמע מוכר לנו מהחיים?)

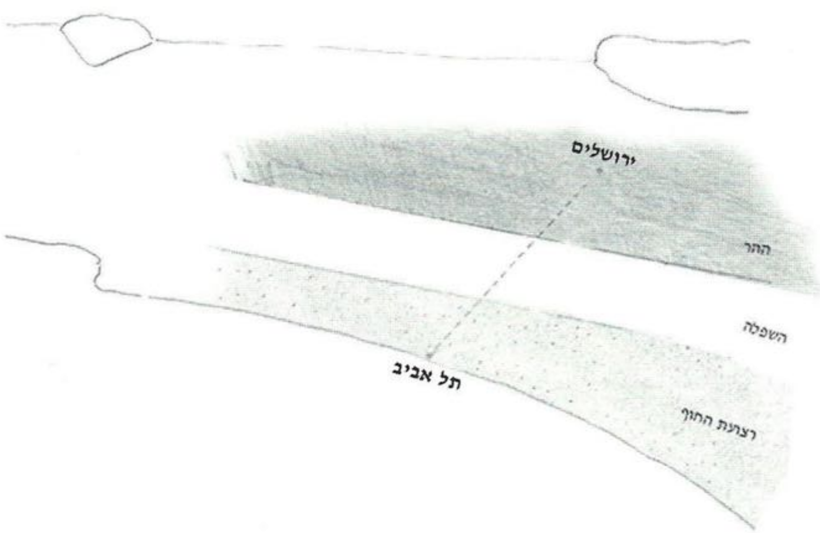
אנו מבקשים למצוא את המסלול שסך כל עלותו חסכונית ככל האפשר.

הערה: אפשר להסתכל על בעיה עם אילוץ מסוג ראשון (איסור), כעל בעיה של אילוץ מסוג שני (מחיר), רק שכאן המחיר למעבר ב"אזורים האסורים" הוא מחיר אינסופי.

נתבונן בדוגמה הבאה:

מהנדס כבישים נמרץ מציע למדינת ישראל פתרון פלא לבעיית התנועה בין תל אביב לירושלים. על פי הצעתו יש לבנות מנהרה תת קרקעית ששום כביש אינו חוצה אותה, וכך ללא פגעי מזג האוויר יסעו הנהגים בביטחה.

בניית המנהרה מחושבת לפי עלויות החפירה: ראו מפה.

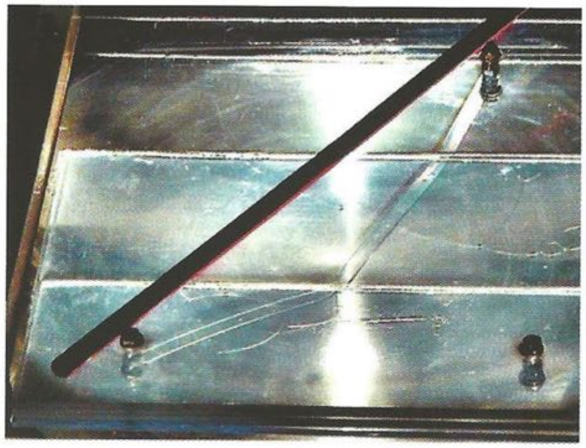


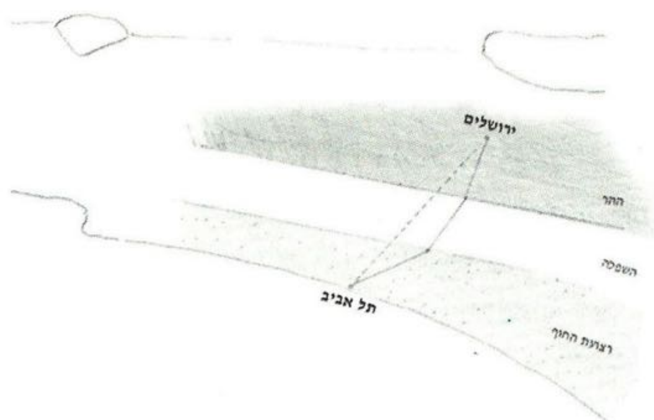
ב**רצועת החוף**, הקרקע חולית ונוחה, וחפירת המנהרה כאן תעלה בתעריף A לכל קילומטר של מנהרה.
הרצועה הבאה היא **השפלה**, קרקע קשה יותר. עלות החפירה בינונית. תעריף B.
הרצועה השלישית היא **ההר**: סלע גיר קשה. עלות החציבה גבוהה. תעריף C.

אנו מבקשים לחבר בין שתי הערים במנהרה: ציר תל אביב - ירושלים, כך שעלות הפרויקט כולו תהיה החסכונית ביותר למדינה וניתן יהיה לגשת לביצוע המעשי.
כיצד ניגשים לבעיה כזו? הרי ייתכנו אינסוף מסלולים שונים. איך נבדוק את כולם? איך נוכל לבחור?

יש לבנות מודל המכיל בתוכו את תנאי הבעיה: נבנה דגם על פי מפה ונדאג לכך שהמרווח בין הלוחות בכל רצועה יהיה מתכונתי (פרופורציונלי) למחיר העלות בכל אזור (יותר יקר - יותר מרווח).
נטבול את הדגם בסבון ונוציא אותו החוצה: אט אט הסבון יתייצב על המסלול החסכוני ביותר. יתקבל קו שבור המחבר את שתי הערים במסלול החסכוני ביותר.

הפתרון שמצא הסבון לבעיית המנהרה החסכונית: אילוץ מסוג שני, מחיר





🕮 סיפור אישי: "דרך שתי נקודות... "

לפני שנים אחדות, כאשר בניתי את המתקנים הללו בבית הספר שלימדתי בו, המה המקום מרוב ביקורים של משלחות ומחנכים מכל הארץ.

והנה נתבקשתי להציג את פינות החקירה המדעיות שבניתי בפני אורח מיוחד: **המשורר יהודה עמיחי** שהגיע ליישוב לרגל מפגש מיוחד של החוג לספרות (12.4.1986). פנו אלי וביקשו להתגאות במרכז הלימודי שלנו.

יהודה עמיחי היה מוקסם מפינות החקירה ומהרוח ההומניסטית שנשבה בחומרי העבודה: הרקע המדעי, התרבותי וההיסטורי.

כשהגעתי להדגמה זו של אילוצים - הזכרתי לו את שירו שלו: "... דרך שתי נקודות עובר רק קו ישר אחד..." וציינתי בפניו: ראה, הנה כאן הטבע מצא את הפשרה החכמה,

כאן הוא מאריך את הדרך הקלה ושם הוא מקצר את הדרך הקשה - ועל ידי כך נמצאה הפשרה המיוחדת של האפשרי: הנה דרך שתי נקודות לא עובר רק קו ישר אחד - אלא **ניתן להעביר קו פשרה גמיש**.
ומתי יידעו המדינאים שלנו **למצוא את הפשרה החכמה** - כפי שהסבון מיטיב כל כך למצוא?

יהודה עמיחי עמד נרגש מן המשל והנמשל. הוא הבטיח לנסות ואולי פעם להוסיף לשירו בית מיוחד לכבוד **הסבון והפשרה החכמה**.
ואם יום אחד תיתקלו בשירו היפהפה של יהודה עמיחי - ותגלו שהמחבר הוסיף לו בית - זיכרו כי הבית הזה עלה וצמח בבית היוצר של קרומי הסבון, במרכז הלימודי.

--- במהלך שלבי ההוצאה לאור של ספר זה נודע על פטירתו של יהודה עמיחי ביום שישי כ"ב באלול תש"ס 22 בספטמבר 2000. נזכור אותו בחום ואהבה.

מה בין שבירה של אור למנהרה חסכונית?

המסלול שמצא הסבון דומה מאוד למסלולה של קרן אור העוברת בין תווך שקוף אחד לשני וממנו לשלישי (למשל: מסלול קרן אור העוברת מזכוכית למים ולאוויר).
יכול אדם לתמוה - הרי זה מעשה ניסים! איך ייתכן שאותו פתרון משרת גם את קרן האור העוברת בין סביבות שונות וגם את חיפוש המסלול החסכוני למנהרה תת קרקעית?
לכאורה הדברים כל כך שונים ואין ביניהם דבר מאחד, לא כלום.
אבל, בכל זאת יש כאן משהו...

קרן האור נשברת על פי המתואר בחוק סנל (Snell). אנו יכולים לומר כי קרן האור "מצייתת" לחוק טבע עמוק ובסיסי הנקרא: **עקרון המינימום של פרמה** Fermat's principle.
עיקרון זה קובע כי מסלולה של קרן אור יעבור באותה הדרך שבה עובר המסלול החסכוני ביותר מבחינת **זמן ההתקדמות הכולל** של קרן האור בתוך החומר. ואף עקרון המינימום של פרמה הוא מקרה פרטי של עקרון המינימום הכולל של המילטון (Hamilton).
עיקרון זה של המילטון קובע כי כל התרחשות פיזיקלית במציאות מתבצעת על פני "מסלול" מינימלי במובן מסוים.

כך יוצא שהתנהגות קרן האור וקרומי הסבון שנראו כל כך זרים ושונים זה מזה - שואבים מתוך אותם עקרונות מתמטיים-פיזיקליים, העומדים ביסוד הטבע: עקרון המינימום או עקרון הפעולה המינימלית!

יש בכך גילוי מרגש ומסעיר על האחדות העצומה השוררת בטבע - שרק לעתים נדירות אנו זוכים להתבונן בה ישירות.

ל"מיטיבי" לכת בפיזיקה

המושגים שנרמזו כאן קשורים לפרק פיזיקלי בתחום הנקרא מכניקה אנליטית.
תחום זה נלמד על פי רוב באוניברסיטה בשנים ב'-ג' במסגרת הלימודים לתואר ראשון בפיזיקה.

*הדיון הזה הוא חלק מהדיון ב**עקרון הפעולה המינימלית** הקשור ל**עקרון הווריאציה של המילטון**.*

Hamilton's principle, Variational principles, The principle of least action.

הטיעונים המרכזיים בדיון הזה נובעים ממשפטים של אוילר (Euler) ולאגראנג' (Lagrange).

המשפט המרכזי לעניין זה נקרא עקרון הפעולה הסטציונרית (הקבועה). מסיבות היסטוריות המשפט הזה מוכר יותר בשם: עקרון הפעולה המינימלית.

*משוואת המילטון-יעקובי מצביעה על כך **שהמכניקה הקלסית מתאימה לגבול של האופטיקה הגיאומטרית**, עבור תנועת גל שבה הקרניים ניצבות לחזית הגל.*

בגבול זה מתקיים כי אורך הגל קצר מאוד ביחס לממדי המכשולים שהגל פוגש בדרכו, כלומר אורך הגל קצר בהשוואה לממד האורכי המאפיין את השתנות תכונות התווך.

(במקרה כזה - תופעות כמו עקיפה והתאבכות אינן מורגשות, ואנו בתחום האופטיקה הגיאומטרית.)

*בדיוק מהסיבה הזו, ברור לנו כיום, מדוע גם תאוריית הגלים של הויגנס (Huygens) וגם תאוריית החלקיקים של ניוטון - תיארו כהלכה את התנהגות האור **עבור תופעות ההחזרה והשבירה**.*

עבור שתי התאוריות הללו - האופטיקה הגיאומטרית זהה מבחינה פורמלית!

באותו האופן מוסבר הדמיון הבולט בין עקרון הפעולה המינימלית לבין עקרון פרמה באופטיקה.

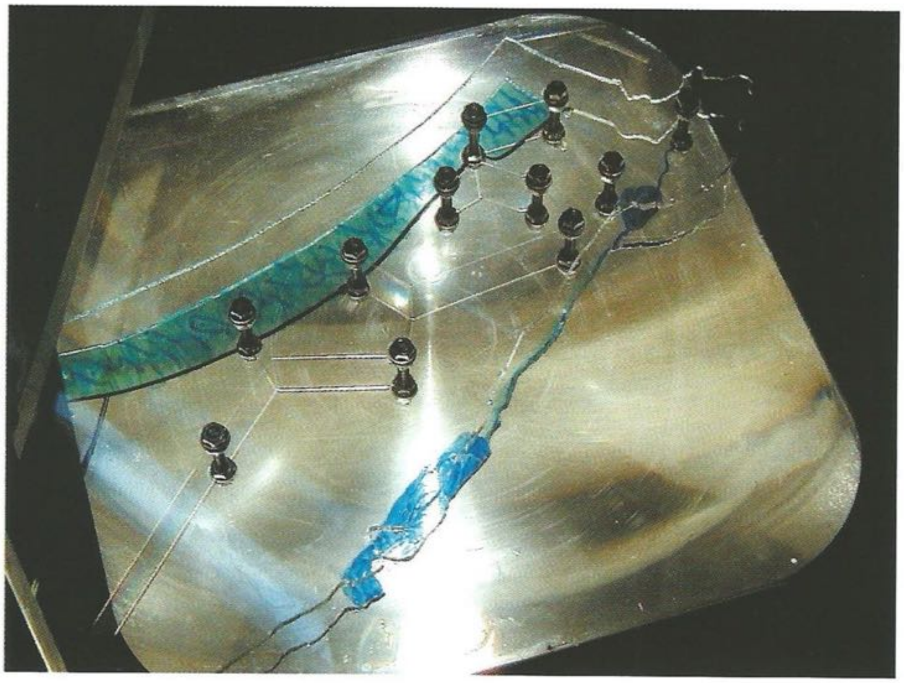
בדומה למודל כריך הסבון המדורג, נוכל לבנות מודל בעל שיפוע אחיד: השתנות הדרגתית ורציפה של עומק הכריך. מודל זה מהווה ייצוג מתאים לבעיה דומה: בעיית ההר שחומר הבנייה שלו משתנה באופן אחיד ורציף מחומר רך לקשה. כלומר, בעיית ההר "הרציף": הקרקע הולכת ומתקשה באופן רציף (ולא בשלוש מדרגות חדות) מקרקע העשויה חול רך ועד לסלע ירושלמי קשה.
במקרה זה גם הפתרון שהסבון מוצא משתנה באופן חלק ורציף, באותה המגמה שראינו קודם לכן:
הסבון מקצר את הדרך באזור הקשה, על חשבון הארכת הדרך באזור הקל יותר.

הסבון פותר את בעית האילוץ
מהסוג השני: מחיר, במקרה הרציף

תהליך דומה עובר על קרן אור כאשר היא פוגשת תווך שקוף שתכונותיו האופטיות משתנות בהדרגה, באופן רציף. הקרן מתעקמת ממש כמו שקרום הסבון מתעקם כאן (במודל ההשתנות הרציפה).
כך ניתן להסביר את התעקמות קרני האור סמוך לקרקע - והחזרתן כמו ממראה. זו היא בדיוק התופעה המתרחשת בתעתועי שרב המכונים "פאטה מוֹרגָנָה".
למעשה אנו מכירים תופעה דומה בחיי יום יום: בקיץ, כבישי האספלט השחורים מתחממים מאוד מאור השמש. כיוון שהכביש התחמם - הוא מחמם את שכבות האוויר הסמוכות אליו. השכבות הקרובות יותר לקרקע חמות יותר. כיוון שהתחממו השכבות של האוויר, הן הופכות לתווך בעל תכונות אופטיות שונות מאלו של האוויר הרגיל, הקריר יותר. השתנות התכונות האופטיות של התווך גורמת לשבירת קרני האור ולשינוי כיוון התקדמותן. הקרניים נשברות עוד ועוד, ובסך הכול הן מוחזרות מן האוויר החם כמו ממראה ממש.
אנו רואים בכיוון הכביש את החזר האור שבא מן השמים - ודומה שאלו מים על הכביש.

...ולתפארת מדינת ישראל!

וכעת, ממש מתבקש לפנות אל הסבון ולנסות לתכנן בעזרתו רשת תשתית כלל ארצית שתהא החסכונית ביותר: יש להכין מודל של מדינת ישראל, על פי מפה. בכל עיר מרכזית לנעוץ בורג חיבור בין הלוחות ו... לטבול בסבון... (היום, אולי יותר מאי פעם בעבר, דומה שראוי היה לטבול את המדינה כולה בסבון, לשפשף קצת ולהוציא...).



מדינת ישראל טובלת בסבון

הנה רשת התשתית האופטימלית למדינה כולה. (יש לזכור כי קיימים פתרונות מספר שהסבון מוצא, ועלינו לבחור מביניהם את הפתרון המתאים לצרכינו.)

נו, טוב, אתם בוודאי צודקים... ישנם **כמה אילוצים** במדינה שלנו - אבל אנו כבר יודעים איך לטפל בהם!

עד כאן החלק השני: "דרך המלך" - העוסק בחיפוש המסלולים החסכוניים ביותר במישור.

בפרקים הבאים נרחיב ונפרט אודות היבטים נוספים הקשורים בפתרון בעיות מתמטיות מן החיים - באמצעות קרומי סבון.

בפרק ח' נעסוק בסריגי סבון מרחביים, בבעיה של פלאטו. נכיר פאונים מיוחדים ונפגוש את משפט אוילר על הפאונים.

נערוך היכרות עם הגופים המשוכללים של אוקלידס, אפלטון וארכימדס. בהשראה כזו נכיר מולקולה חדשה, המזכירה מבנה של כדורגל: מולקולת פולרן. נפגוש את הדבורים וחלת הדבש ונגלה שהם כבר למדו את משפט שטינר ומשפט פלאטו...

לסיכום הפרק נברר מה הם "הכוחות בשטח", כלומר מה הם כוחות מתח הפנים הפועלים במשטח הנוצר על ידי קרום הסבון.

מקורות והערות לפרק ז'

המקורות וההערות על פי סדר הנושאים שנידונו בפרק:

1. קרומי סבון ופתרון בעיות מתמטיות מן החיים
2. הנסיכה הפיניקית דידו. הבעיה של דידו - הבעיה האיזופרימטרית
3. משפט שטינר. המתמטיקאי השוויצרי יעקוב שטינר
4. הנקודות המיוחדות במשולש, זווית הראייה וצומת שטינר
5. **אילוצים**, במובנם המתמטי-פיזיקלי

   עקרון הוואריאציה של המילטון. **עקרון הפעולה המינימלית במכניקה**

   הקשר בין עקרונות אלו במכניקה ל**עקרון פרמה באופטיקה** ולחוק סנל
6. על המתמטיקאי והפיזיקאי פייר דה פרמה ועל משפט פרמה
7. **בועות סבון באמנות, במדע ובמתמטיקה**. על האגרטל האטרוסקי העתיק
8. מקורות נוספים על קרומי סבון.

1. קרומי סבון ופתרון בעיות מתמטיות מן החיים

לוז, ז' (1982). קרומי סבון ובועות סבון כמודלים מתמטיים. *פי האטום*, כרך א' חוברת מס' 2.

לוז, ז' (1983). קרומי סבון. *מדע כ"ז*-1, עמ' 13-18.

בּוֹיס, צ'ארלס ורנון (1966). *בועות סבון והכוחות המעצבים אותן*. תרגם: חיים בן עמרם. תל אביב: ספרית מדע לעם. הוצאת דביר ועם עובד.

זהו אחד מספרי המופת של המדע הפופולרי. הספר מכיל שלוש הרצאות שבויס הרצה לנוער ולקהל הרחב בשנים 1889 ו-1890.

המקור:

Boys, C.V. (1959). *Soap bubbles and the forces which mould them*. New York: Doubleday & Company, Inc.

Isenberg, C. (1992). *The science of soap films and soap bubbles*. New York: Dover Publications.

זהו ספר רציני על סבון, ברמה של מכללה: הרבה דיונים מתמטיים-פיזיקליים בעניין בועות סבון, משטחים מינימליים - והשלכותיהם על העולם הממשי.

בועות סבון (1988). *לדעת* י"ח-8, עמ' 13 [לא צוין שם מחבר].

בועות סבון- משחק רציני (1984). *לדעת* ט"ו-1 עמ' 14-16 [לא צוין שם מחבר].

2. הנסיכה הפיניקית דידו. הבעיה של דידו - הבעיה האיזופרימטרית

על הנסיכה דידו והבעיה האיזופרימטרית, תורת הווריאציה במתמטיקה והשלכותיה, בעיית פלאטו:

Newman, J. R. (1956). *The world of Mathematics*. Vol II. (pp. 882-909). New York: Simon and Schuster.

דיון מעמיק בבעיה של שטינר, בבעיה האיזופרימטרית ובבעיה של פלאטו: "פתרונות ניסויים לבעיות מינימום בעזרת קרומי סבון", מאת: ריצ'ארד קוראנט והרברט רובינס:

Courant, Richard and Robbins, Herbert (1956). Plateau's problem. In Newman, J. R. (Ed.), *The world of mathematics*. Vol II. (pp. 901-909). New York: Simon and Schuster.

Courant, Richard & Robbins, Herbert (1941, 1951). *What is mathematics*? London, New York, Toronto: Oxford University Press. The Isoperimetric problem. Ch. VII, § 8, § 9, pp. 373-376-379

The Calculus of Variations. Ch. VII, § 10, pp. 379-381

Fermat's Principle in Optics. Ch. VII, § 10, pp. 381-383

Soap Bubles, Plateau's Problem. Ch. VII, § 11, pp. 385-397

על הנסיכה דידו:

עוד מעט מידע על הצד ההיסטורי והתרבותי הקשור לסיפור על דידו:

סיפור דידו הוא חלק מן האפוס היווני-רומאי. הסיפור הזה היה אהוב במיוחד על הרומאים.

דידו (Dido) הייתה לימים מלכת קרתגו.

וֶרגיליוס, המספר הרומאי הידוע, מספר על אהבת דידו ואֵנֵאַס, בספרו:

אניאס - סיפור המיתולוגיה הרומאית.

הספר תורגם לעברית על ידי שלמה דיקמן. הוצאת מוסד ביאליק.

אֵנֵאַס (Aeneas), אחד מגיבורי מלחמת טרויה, ערך מסעות אל מקומות רבים בחופי הים התיכון.

הוא התאהב בנסיכה דידו וחי איתה זמן מה.
לאחר זמן, ציוו האלים על אניאס לצאת ולהקים את רומי, והוא נאלץ לעזוב את דידו.
זו כעסה עליו מאוד והפכה לאויבתו המושבעת.
אחד מצאצאיו של אֱנֵאָס הוא רוֹמוּלוּס - מייסדה של רומי. רוֹמוּלוּס הוא אחד מהילדים רומולוס ורמוס, שהזאבה של רומא מצאה וגידלה. על פי המסורת הם אלו שייסדו את רומא ואילו דידו הקימה את קרתגו (קרת חדשת).
על פי המסורת - שורש האיבה ארוכת השנים בין קרתגו לרומא קשור לשנאה שבין דידו לאניאס.

לפי גרסה אחת, דידו המיתה את עצמה מרוב צער - לאחר שאֱנֵאָס עזב את קרתגו.

סיפור אהבתם הטרגי של דידו ואֱנֵאָס עורר עניין רב במהלך הדורות, וזכה לביטוי נרחב באומנות, הן בציור והן במוזיקה. המלחין הבריטי הנרי פֶּרְסֶל (Henry Purcell 1659-1695) כתב אופרה בשנת 1689 הנקראת: דִידוֹ ואֱנֵאָס. האופרה הזו מוצגת עד עצם היום הזה.

פלוסר, ד' (1968). אֱנֵאָס. *האנציקלופדיה העברית* (כרך ד', עמ' 295-296). ירושלים: חברה להוצאת אנציקלופדיות.

רוזלאר, מ' (1969). דִידוֹ. *האנציקלופדיה העברית* (כרך י"ב, עמ' 367-368). ירושלים: חברה להוצאת אנציקלופדיות.

על הצד ההיסטורי והתרבותי הקשור לסיפור על דידו:

Aeneas (1968). *The Oxford Clssical Dictionary* (pp. 11-12). London: Oxford University Press.

Dido (1968). *The Oxford Clssical Dictionary* (p. 2701). London: Oxford University Press.

על האופרה דידו ואנאס מאת הנרי פרסל, ראו:

Dido and Aeneas (Purcell's opera) (1996). *The Larousse Encyclopedia of Music*. (pp. 194-195, 252). London: Chancellor Press.

עוד על דידו:

זיסקין, ק' ולטנר, ל' (1998). *לעשות מתמטיקה - תבלינים מתמטיים - אוסף סיפורים היסטוריים*. הטכניון - המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, מחר 98 באצבע הגליל. עמ' 71 סעיף 120: האינטואיציה של המלכה דידו.

3. משפט שטינר. המתמטיקאי השוויצרי יעקוב שטינר

(Jakob Steiner 1796-1863)

Courant, Richard & Robbins, Herbert (1941, 1951). *What is Mathematics?* London, New York, Toronto: Oxford University Press.
Stiener's Problem - Stiener Theorm. Ch. VII, § 5, pp. 354-361

על המתמטיקאי יעקוב שטַיְנֶר: מתמטיקאי שוויצרי, מגדולי הגיאומטרים בזמנו.

שטינר, יעקוב (Jakob Steiner 1796-1863) (1979). *האנציקלופדיה העברית* (כרך ל"א, עמ' 750). ירושלים: חברה להוצאת אנציקלופדיות.

על משפט אחר של שטינר:

ברמן-סגלר, א' (1972). משפט שטינר. *גליונות מתמטיקה* כרך 4 חוברת 7, עמ' 2-8.

לוין, מ' (1971). על בעיית שטינר - להמוס. *גליונות מתמטיקה* כרך 4 חוברת 6, עמ' 4-7.

אתרי אינטרנט על יעקוב שטינר:

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Steiner.html
http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Posters2/Steiner.html
http://www.britannica.com/bcom/eb/article/0/0,5716,71360+1,00.html
http://www.treasure-troves.com/bios/Steiner.html
http://www.bartleby.com/65/st/SteinerJ.html

4. הנקודות המיוחדות במשולש, זווית הראייה וצומת שטינר

על הנקודות המיוחדות במשולש:

חטיבה, נירה (1971). *גאומטריה, חלק א-ב'.* הוצאת "אורי" מהדורה שלישית. פרק י', סעיף 3, עמ' 125: נקודות מיוחדות במשולש.

קלעי, ש"פ ותוחמן, ז' (1980). *הנדסת המישור* (פלנימטריה), חלק א'. הוצאת "עבר" ירושלים. פרק חמישי, סעיף כ"ח: נקודות מיוחדות במשולש, עמ' 130-141.

על הקשר בין זווית ראייה לנקודת צומת שטינר:

מעניין לדון בשאלה: מהו המקום הגיאומטרי של הנקודות במישור, שמהן רואים את הקטע הנתון, בזווית ראייה נתונה.

נקודת צומת שטינר עונה על שאלה זו עבור זווית ראייה של 120^0, ועבור שלוש צלעות המשולש (במשולשים מסוימים).

עיינו:

חטיבה, נ' (לא צוינה שנת הוצאה). הנדסת המישור, חלק ב'. פרק י"ד, סעיף ט"ז - 3 עמ' 31: המקום הגיאומטרי ממנו "רואים" קטע בזווית נתונה. הוצאת "אורי".

קלעי, ש"פ ותוחמן, ז' (1980). *הנדסת המישור* (פלנימטריה), חלק א'. פרק שישי, סעיף ל"ו: זווית הראייה, עמ' 167-169. ירושלים: הוצאת עבר.

אתר מרתק באינטרנט, בעברית: **מתמטיקה מקשרת**: בעיות אופטימיזציה, בניית שדה תעופה. מתמטיקה מקשרת היא פרויקט למידה מרחוק המבוסס על התכנית: "Connected Geometry", אשר עובדה לעברית על ידי המרכז לטכנולוגיה חינוכית, מט"ח. כאן נוכל למצוא דיון מקיף בבעיות של חיפוש המסלול החסכוני ביותר, את ההוכחה של המתמטיקאי הגרמני ג"א הופמן משנת 1929 ועוד.

האתר: http://www.cet.ac.il/~math/linked-math/

5. אילוצים, במובנם המתמטי - פיזיקלי

עקרון הוואריאציה של המילטון. **עקרון הפעולה המינימלית במכניקה**. הקשר בין עקרונות אלו במכניקה - ל**עקרון פרמה באופטיקה** ולחוק סנל.

על המתמטיקאי והפיזיקאי וויליאם רואן המילטון (1805-1865):

Katz, V.J. (1993). *A history of mathematics - an introduction*. Biography: *William Rowan Hamilton* (1805-1865). New York: HarperCollins College Publishers, p. 616.

מקורות לעניין: **אילוצים במובנם המתמטי - פיזיקלי, עקרון הוואריאציה של המילטון, עקרון הפעולה המינימלית ועקרון פרמה באופטיקה גיאומטרית:**

Goldstein, H.(1980, 1981). *Classical mechanics*. second edition. Addison - Wesley Publishing Company.

עיינו בספרו החשוב של גולדשטיין הנ"ל, על פי הפירוט:

א. אילוצים, במובנם המתמטי - פיזיקלי

Constraints § 1-3, pp. 11-16.

Chapter 2: Variational principles and Lagrange equations. pp. 35-63.

Lagrange undetermined multipliers p. 46

ב. עקרון המילטון, עקרון הפעולה המינימלית במכניקה

Hamilton's principle § 2-1, pp. 35-37

Advantages of a variational principle formulation. § 2-5 pp.51-53.

The principle of least action. § 8-6, pp. 365-371.

ג. הקשר בין עקרונות אלו במכניקה - לעקרון פרמה - באופטיקה גיאומטרית

The principle of least action. § 8-6, pp. 365-371.

The connection between the Hamiltonian formulation and geometrical optics:

Hamilton-Jacobi Theory, Geometrical Optics and Wave Mechanics. § 10-8, pp. 484-492.

מכניקה אנליטית (1998-2000). תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה. קורס מס' 20422.

הקורס מבוסס על הספר:

Scheck, F. (1994). *Mechanics from Newton's laws to deterministic chaos*. Springer-Verlag. 2nd ed.

לקורס נלווה הספר:

ורבין, י' (2000). *מכניקה אנליטית - מדריך למידה*. תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה.

דיון של פיינמן על שבירה של אור, עקרון פרמה באופטיקה ופטה מורגנה (מיראג', מחזה שרב):

פיינמן, ריצ'רד פ' (1988). *התיאוריה המוזרה של אור וחומר*. תרגם: ד' פונדק, עמ' 53-55. תל אביב: הקיבוץ המאוחד.

המקור באנגלית:

Feynman, R. P. (1985). QED *The strange theory of light and matter*

6. *על המתמטיקאי והפיזיקאי פייר דה פרמה ועל משפט פרמה (Pierre de Fermat 1601-1665)*

פרמה היה עורך דין צרפתי. עבורו הייתה המתמטיקה תחביב. פרמה מצא שורה של גילויים חשובים. בין השאר ניסח את **עקרון פרמה באופטיקה**, הקובע כי קרן אור תעבור בתווך שקוף במסלול שבו זמן התקדמותה הוא מינימלי. עיקרון זה מתיישב עם חוק השבירה של סנל (Snell).

פרמה לא פרסם את ממצאיו, אלא נהג לגלות אותם במכתבים אישיים לחבריו: פסקל ודקרט. בשנת 1621 קנה פרמה בפריז את הספר "אריתמטיקה" של דיופנטוס (מהמאה ה-3). בספר היה דיון על משפט פיתגורס $x^2 + y^2 = z^2$
פרמה עיין בדיון שבספר וכתב בשולי הספר כי בעוד שלמשוואה הזאת ישנם אינסוף פתרונות שלמים (המכונים שלשות פיתגוראיות, כמו למשל $\{5,12,13\}$, $\{3,4,5\}$), הרי למשוואה: $x^n + y^n = z^n$ כאשר $n > 2$ אין בכלל פתרון שלם ולא טריוויאלי.
(פתרון טריוויאלי הוא למשל: $x = y = z = 0$, או: $y = 0$, $x = z$ וכו'.)

פרמה הוסיף וכתב: "מצאתי הוכחה נהדרת לכך, אך השוליים צרים מדי להכילה". המשפט ידוע בשם *המשפט הגדול של פרמה.* לאחר מותו נמצא הספר של דיופנטוס, והערת פרמה בשוליים התפרסמה בכל העולם. גדולי המתמטיקאים ניסו להוכיח את משפט פרמה - ללא הצלחה.

אוילר ולגרנז' הוכיחו אותו עבור מקרים פרטיים.

בשנת 1993 פרסם ווילס הוכחה שנמצאה לקויה.

רק בשנת 1995 הגיע המתמטיקאי ווילס (Weils) מאוניברסיטת קימברידג' להוכחה הנכונה, המתבססת על עבודתם של מספר מתמטיקאים. ההוכחה משתרעת על פני עמודים רבים (כ-200 עמודים).

סינג, ס' (2000). *המשפט האחרון של פרמה:* סיפור החידה המתמטית ששיגעה את המוחות המבריקים ביותר בעולם במשך 358 שנים. מאנגלית: עודד שכטר. תל אביב: ידיעות אחרונות - ספרי חמד - ספרי עליית הגג. סדרת פרוזה - פילוסופיה ומדע.

המחבר הוא פיזיקאי העובד במחלקת התכניות המדעיות של ה - BBC, שם גם כתב וביים את הסרט על המשפט האחרון של פרמה.

אתר אינטרנט מרתק בעברית על המשפט האחרון של פרמה - מאת דוד שי.

באתר הסברים יפים ורשימת מקורות מפורטת ביותר. באתר ישנן הפניות לאתרים מתמטיים רבים!

http://www.geocities.com/CapeCanaveral/4661/fermat.htm

עוד על פרמה:

זיסקין, ק' ולטנר, ל' (1998). *לעשות מתמטיקה - תבלינים מתמטיים - אוסף סיפורים היסטוריים.* הטכניון - המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים, מחר 98 באצבע הגליל. עמ' 27 סעיף 40: המשפט הגדול של פרמה.

מדור חדשות (1993). *גלילאו* - המגזין הישראלי למדע ואקולוגיה, גיליון 1, עמ' 3.

מדור חדשות (1994). *גלילאו* - המגזין הישראלי למדע ואקולוגיה, גיליון 3, עמ' 2.

עמיצור, ש' א' (1976). פֶּרְמָה, פְּיֶר דֶה (Pierre de Fermat 1601-1665). *האנציקלופדיה העברית,* כרך כ"ח, עמ' 275-276. ירושלים: חברה להוצאת אנציקלופדיות.

רוזנברג, מ' (1995). המשפט הגדול של פרמה - ההוכחה המיוחלת. *גלילאו* - המגזין הישראלי למדע ואקולוגיה, גיליון 9, עמ' 34-40.

Horgan, J. (October 1993), Trends in Mathematics: The death of PROOF. *Scientific American*, pp. 74-82.

Stewart, I. (November 1993), Fermat's Last Time - Trip. Mathematical Recreations, *Scientific American*, pp. 85- 88.

על בעיית פרמה ראו גם:

גבעולי, נ' (1988). שעשועי מתמטיקה ומחשב. *מדע* ל"א-3, עמ' 147.

המשפט הקטן של פרמה:

עיינו בגיליון *אלף אפס* מחודש יוני 1998.

המאמר מופיע גם באתר האינטרנט של אלף אפס.

המאמר:

http://alefefes.macam98.ac.il/article/MISHPAT.htmL

זינגר, דוד. (ללא תאריך). *הלומדה: עקרון פרמה*. מכון ויצמן למדע. בהפצת חברת רמות.

סנדריכין, א' (1996). האם הטבע תמיד בוחר בזמן הקצר ביותר? (על עקרון הזמן המינימלי של פרמה). *תהודה - עתון מורי הפיזיקה*. כרך 17, גיליון 3, עמ' 41-47.

7. בועות סבון באמנות, במדע ובמתמטיקה. על האגרטל האטרוסקי

בספרות המדעית מוזכר שוב ושוב אגרטל אטרוסקי במוזאון הלובר בפריז, המתאר ילדים משחקים בבועות סבון

(Berthoud, 1866; Plateau, 1873; Nitsche,1975).

האגרטל האטרוסקי הקדום מוזכר בהרצאותיו של סר צ'ארלס ורנון בויס בלונדון בשנים 1889-1890:

בויס, צ"ו (1966). *בועות סבון והכוחות המעצבים אותן* (תרגום: ד"ר חיים בן-עמרם). עמ' 16, תל אביב: ספרית מדע לעם, הוצאת דביר ועם עובד.

חיפשתי בעמל רב את תמונתו של אותו אגרטל אטרוסקי - ולא מצאתיה.

המתמטיקאי האיטלקי מישֶל אֶמֶר (Emmer, M. 1987) שעסק רבות בקרומי סבון, הן באמנות והן במדע - מציין כי ככל הנראה, נעלמו עקבותיו של האגרטל האטרוסקי הזה ממוזאון הלובר בפריז . . .

מאמר מרתק על בועות סבון באמנות ובמדע, והתייחסות מיוחדת לאגרטל האטרוסקי במוזאון הלובר בפריז:

Emmer, M. (1987). Soap bubbles in art and science: from the past to the future of math art. *Leonardo 20*, No. 4, pp. 327-334.

Oxford; New York: Pergamon Press.

המאמר הזה מופיע בהדפסה חוזרת בספר:

Emmer, M. (Ed.) (1993). *The visual mind: art and mathematics*. Chap. 21, pp. 135-142. Cambridge, Mass.: MIT Press.

בשלושת המקורות הבאים מוזכר כי במוזאון הלובר בפריז נמצא אגרטל אטרוסקי שעליו מצוירים ילדים המשחקים בבועות סבון.

Berthoud, H. (1866). *Les petites chroniques de la science*. p. 265, Paris: Année.

Plateau, J. (1873). *Statique expérimentals et théorique des liquides soumis aux seules forces moléculaires*. Paris: Gauthier-Villars.

Nitsche, J.C.C. (1975). *Vor Lenscungen über Minimal Flächen*. p. 8, Berlin: Springer-Verlag.

8. מקורות נוספים על קרומי סבון

וורדרמן, ק' (1999). *כיצד פועלת המתמטיקה - האנציקלופדיה המדעית החדשה*. תל אביב: משכל - ידיעות אחרונות - ספרי חמד. על קרומי סבון, עמ' 142.

Almgren, F. J. (1975). Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints, *Memoirs of the American Mathematical Society, 165*.

זהו מחקר מדעי בעיתונות המקצועית המתמטית - מתאים יותר לבוגר אוניברסיטה במתמטיקה.

Almgren, F. J. & Taylor, J. E. (1976). The geometry of soap films and soap bubbles, *Scientific American*, July, pp. 82-93.

Lovett, D. (1994). *Demonstrating science with soap films*. Bristol & Philadelphia: Institute of Physics.

זהו ספר רציני ביותר על בועות סבון, המטפל בכימיה של קרומי הסבון, משטחים מינימליים ועוד. הספר מכיל גם דיון היסטורי מקיף על קרומי הסבון.

Morgan, F., Melnick, E.R., & Nicholson, R.(1997). Activities: The soap - bubble - geometry contest. Simple questions expose deep geometric concepts. *The Mathematics Teacher, 90*, Number 9, pp. 746-750.

בסוף המאמר יש רשימת מקורות ביבליוגרפיים לנושא בועות סבון: כולל אתרים באינטרנט.

Noddy, T. (1988). *Tom Noddy's bubble magic,* Philadelphia, Pennsylvania: Running Press.

זהו ספר קל יותר המאפשר ליהנות מהכיף שבבועות הסבון - תוך כדי לימוד מדעי.

Rogers, E. M.(1960). *Physics for an inquiring mind.* Chapter six - surface tension: drops and molecules, Princeton, New Jersey: Princeton University Press.

הספר הקריא הזה דן בבעיות של מתח פנים, נימיות, קרומי סבון ועוד.

Shaw, M.I. & Smith, G.F. (September 1995). Double bubble? no trouble! Let your students explore the physical properties of soap film from the inside out. *Science and Children*, pp. 24-27.

Taylor, J. T. (1976). The structure of singularities in soap-bubble-like and soap-film-like minimal surfaces, *Annals of Mathematics,* 103, pp. 489-539

זהו מאמר מדעי במתמטיקה העוסק ביסודיות בבועות הסבון.

Walker, J. (December 1981). Amateur Scientist: Reflections on the rising bubbles in a bottle of beer. *Scientific American.*

דיון בבועות המתפתחות בתוך משקה הבירה: התבניות הנוצרות, הכוחות השולטים בבועות, המתיחות שבקרומים והסיבות להרס הקרומים.

Walker, Jearl (December 1982). Amateur scientist: What happens when water boils is a lot more complicated than you might think. *Scientific American.*

דיון בבועות המתפתחות בעת רתיחת המים בסיר הבישול.

Zubrowski, B. (1979). *Bubbles: A children's museum activity book.* Boston: Little, Brown and Company.

המחבר הוא תומך נלהב של השימוש בקרומי סבון כעזר הוראה. הספר מתאר מספר רב של פעילויות מגוונות ובלתי שגרתיות בבועות סבון.

Zubrowski, B. (1982). Memoirs of a bubble blower. *Technology Retried,* November December.

המחבר מתאר כיצד הוא עצמו משתמש בבועות סבון בהוראה, ומקיים דיון על החשיבות של חקר תופעות טבע והדגמתן הלכה למעשה - תוך כדי משחק ושעשוע בכיתה.

San Francisco Exploratorium Bubbles Web pages: אתר האקספלורטוריום:

http://www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/bubbles.html

באתר האקספלורטוריום יש פירוט רב על קרומי סבון, הכנת סבון, ביבליוגרפיה מגוונת וקישורים לאתרים באינטרנט.

פרק ח':
סריגי סבון מרחביים

במונח סָרִיג אנו מתכוונים לציין גופים תלת ממדיים הבנויים ממוטות דקים המחוברים בקצותיהם.
הגופים הללו בנויים כסורג ויוצרים מבנה של גופים הנדסיים מרחביים כמו: פירמידה, קובייה, מנסרה וכו'.
מקור המונח סריג בתיאור המבנה הגבישי של חומרים מוצקים. במצב הגבישי, האטומים ערוכים במבנה מסודר תלת-ממדי. מבנה כזה נקרא סריג גבישי של אטומים.

בפרק זה נרחיב את הדיון ונצא מבעיות במישור הדו ממדי לבעיות במרחב התלת ממדי. נראה את היתרונות העצומים שהשימוש בסבון מקנה לנו בבואנו לטפל בבעיות מרחביות מורכבות למדיי.
החלק הראשון של הפרק נקרא **סריגי סבון מרחביים - אופרת סבון בשלושה ממדים.** כאן, נפגוש את משפט פלאטו, הדן בכיסוי של גופים מרחביים במשטחים מינימליים.
בחלק השני, הנקרא **הגופים המשוכללים - אוקלידס אפלטון, ארכימדס**, נכיר את הפאונים המיוחדים ונבחן אותם בתמיסת סבון.
בחלק השלישי, הנקרא **על דבורים ועל חלת הדבש**, ננסה לברר לעצמנו איך "גילו" הדבורים את משפט שְטַיְנֶר ומשפט פלאטו ואילו יתרונות מתקבלים מבניית חלת הדבש באופן המתיישב עם משפטים אלו.
בחלק הרביעי, הנקרא **"הכוחות בשטח" על מתח הפנים ועל האלסטיות של קרומי הסבון**, נברר מה הם כוחותיו המיוחדים של קרום הסבון, המאפשרים לו "לפתור" בעיות מתמטיות מהחיים.

במהלך הדיונים הללו נציע כיוונים נוספים לפרויקטים בין תחומיים, בנושאי מתמטיקה - פיזיקה - כימיה - ביולוגיה.

חלק ראשון: סריגי סבון מרחביים – אופרת סבון בשלושה ממדים

כדי לחקור בעיות של קרומי סבון במרחב התלת ממדי - טוב נעשה אם נצטייד במתקנים אחדים - סריגים של חומר קשיח כמו חוט חשמל עבה. סריגים אלו בנויים כשלד של גופים הנדסיים במרחב התלת ממדי: מבנים מרחביים כמו אוכף וגג של בית דו מפלסי, וכן פאונים כמו קובייה ופירמידה ועוד.

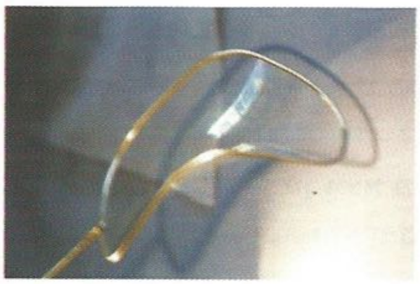
בהמשך נטבול אותם בסבון, בזה אחר זה: נדון, נשאל ונברר.

הנחיות טכניות לבניית המתקנים, המלצות להכנת הסבון וכו' - נביא בפרק ט'.

1. אוכף

מבנה מתמטי מרתק: אם נטבול את המתקן הזה (לולאה עקומה) בסבון - נגלה שהסבון פורס יריעה של משטח עקמומי הנאחז בשולי הלולאה הקשיחה. נתבונן במשטח שהתקבל:

מכיוון אחד זהו שיא (או הר). מכיוון אחר זהו שפל (או עמק).

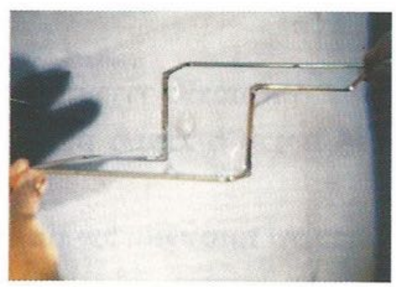


אוכף ויריעה של קרום הסבון

2. גג של בית דו מפלסי - חסכוני ויציב

חלומה של כל משפחה בימינו הוא בית קטן בסביבה טבעית ירוקה. אם נבקש מהמתכננים לתכנן לנו בית כזה כך שהגג יהיה חסכוני במיוחד אך גם יציב במיוחד כנגד רעידות אדמה - סביר להניח שנקבל תשובה חדה וברורה:

תחליטו מה אתם רוצים: חסכוני או יציב, אך בוודאי שלא שניהם...



גג דו-מפלסי מקרום סבון

הטבע מציג אפשרויות אחרות. נטבול את המודל הזה של גג דו מפלסי בסבון. הנה התקבלה יריעה שהיא החסכונית ביותר בחומר הבנייה (אילו יכולה הייתה להתכווץ עוד - הייתה מתכווצת), וגם היציבה ביותר כנגד זעזועים ורעידות.

הערה טכנית: עד לשנים האחרונות הכתיבו מגבלות טכניות של בניית הפיגומים ותבניות היציקה את צורת המבנים. משום כך מרבית הבנייה בימינו היא בניית קירות וגגות ניצבים זה לזה. בשנים האחרונות, עם השתכללות התקני הבנייה ועם התפתחות

הבנייה המתועשת - הולכות ומתפתחות שיטות בנייה המאפשרות את ניצול היתרונות של הסבון.

ישנם היום מבני ציבור רבים, מבני תערוכות ענק ועוד, אשר עוצבו ותוכננו בעזרת מודלים של קרומי סבון.


ארבעון וקרומי הסבון המכסים אותו

3. ארבעון - טטראדר או טטרהדרון (פירמידה בעלת בסיס משולש)

אם נטבול פירמידה בעלת בסיס משולש במי סבון, נגלה למרבית ההפתעה, כי יריעת הסבון שנפרסה נאחזת בכל המקצועות (אלו המוטות המחברים את הקדקודים). מתקבלת יריעה מיוחדת הבנויה משישה מישורים. כל שלושה מישורים סמוכים נפגשים ביניהם לאורך קו תפר בזווית של 120°.

ניתן לבדוק זאת ב"מד זווית שְׁטַיְנֶר" המיוחד שהכנו. זוכרים?

נוצרו ארבעה קווי תפר. קווים אלה נפגשים בנקודה מרכזית בזווית מיוחדת: $109^\circ 28'$.

אנו מכנים אותה בשם: "זווית הקסם" (בעקבות מאמרו של ולדימיר גרשוביץ - ראו במקורות בסוף הפרק). נכין עבורה מד זווית מיוחד (בצבע מיוחד) שייקרא להלן "מד זווית הקסם".

יוסף פלאטו (Joseph Antoine Ferdinand Plateau 1801-1883)

יוסף פלאטו, פיזיקאי בלגי, זכור בייחוד בשל תרומתו למתמטיקה בתחום הנקרא: בעיות פלאטו.

פלאטו נהג להשתמש בסריגים מרחביים אותם טבל בתמיסת מי סבון - כדי לחקור את המשטחים המינימליים שהסבון היה פורס על פני המתקנים הללו. פלאטו הציע דרך ניסויית להתבונן במשטחים מינימליים אלו - ככלי סיוע במחקר המתמטי התאורטי.

פלאטו, שהתעוור בעת ביצוע תצפיות לכיוון השמש, חי כעיוור במשך 40 שנותיו האחרונות.

משפט פלאטו עוסק בבעיות של משטחים מינימליים במרחב התלת ממדי.

אנו מנסים למצוא את המשטח בעל השטח המזערי - אשר מכסה את קו המתאר, את השלד, של גוף נתון, במרחב התלת ממדי. הבעיה הוצגה לראשונה על ידי המתמטיקאי הצרפתי הנודע לגראנג' (J. L. Lagrange, 1736-1813), והיא הכללה מסוימת של בעיית דידו. (כזכור, בבעיה של דידו ביקשנו למצוא את קו הגבול - ההיקף החסכוני ביותר, הכולא בתוכו שטח מרבי, במישור. עיינו פרק ז'.)

למעשה אנו חוקרים את **מערכת היחסים בין מרחב נתון לבין השפה שלו**: הגבול התוחם אותו.

כאשר המרחב הוא משטח (דו ממדי), השפה שלו היא ההיקף של המשטח, כלומר הקו (החד ממדי) התוחם את המשטח. זו היא הבעיה של דידו, הבעיה האיזופרימטרית.

כאשר המרחב הוא נפח (תלת ממדי), השפה שלו היא שטח הפנים (הדו ממדי) העוטף את הצורה, או היריעה המחברת את קווי המתאר של הצורה. זו הבעיה של פלאטו.

בעיית פלאטו קשורה לפתרון מערכת משוואות דיפרנציאליות חלקיות - משימה הנחשבת לקשה למדי גם בלימודים גבוהים. פלאטו מצא "פתרון פיזיקלי" למגוון רחב מאוד של קווי מתאר - על ידי טבילת תבניות עשויות חוט קשיח בתמיסת סבון. הפתרון המתמטי הכללי של בעיית פלאטו - סבוך למדיי.

דיון בבעיה של פלאטו: "פתרונות לבעיות מינימום בעזרת קרומי סבון", ניתן למצוא במאמר מאת: ריצ'ארד קוראנט והרברט רובינס ברשימת המקורות בסוף פרק זה.

התוצאות שניסח פלאטו

המשטח החסכוני ביותר הנאחז במסגרת נתונה של קווי גבול סגורים יקיים את התכונות והאפיונים הבאים:

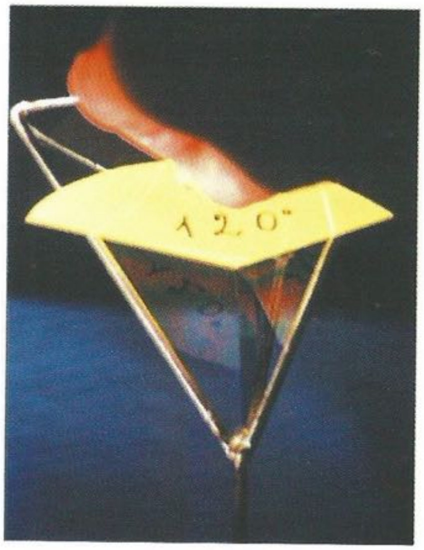
א. **שלושה מישורים** יכולים להתחבר ליצירת **קו תפר** משותף, כך שהזוויות בין המישורים יהיו שוות ל-120°.

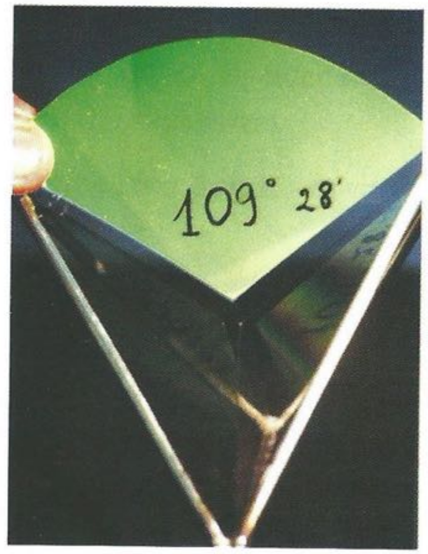
(למעשה הכרנו כבר היבט של משפט זה בהטלה על המישור הדו ממדי - וקראנו לו משפט שטַיְנֶר.)

ב. **ארבעה קווי תפר** כאלו יכולים להתחבר **לנקודת צומת** (פלאטו) משותפת, בזוויות מרחביות שוות. הזווית בין כל שני קווים כאלה נקראת זווית הקֶסֶם: $109^\circ\ 28'$.

כמה מילים לזכותה של זווית הקסם:

זווית מיוחדת זו היא פתרון לבעיות מרתקות בטבע, בחיי היום יום ובתחומי המדע והמתמטיקה.





המבנה היסודי של תא היחידה של יהלום הוא דמוי ארבעון: כל אטום של פחמן קשור לארבעה שכנים קרובים, גם הם אטומי פחמן, בזוויות מרחביות שוות: הלא הן זווית הקסם.

זווית הקסם היא פתרון למספר רב של בעיות המאופיינות בחיפוש המצב המיטבי (אופטימום) במתמטיקה ובפיזיקה. זווית הקסם קשורה באופן מרתק לחלת הדבש של הדבורים, כמו גם הזווית בת 120° הקשורה למשפט שטַיְנֶר. על כך נרחיב בהמשך פרק זה.

פאונים

המושגים המרכזיים הדרושים לאפיון הפאונים - קדקוד, מקצוע, פאה:

קדקוד - נקודת המפגש של שני קווים או יותר.

מִקצוֹע - צלע, הקו הישר שנוצר במקום שבו שתי פאות נפגשות.

פֵּאָה - דופן, אחד המישורים המגבילים פאון.

פֵּאוֹן - גוף המוגבל במצולעים מישוריים.

אחת המטרות שלנו בפרויקט הזה היא להכיר היטב את משפחת הפאונים. נתבונן בשורה של פאונים מוכרים למדיי מחיי היום יום. נלמד להכירם בשמותיהם, וננסה להצביע על יישומים שונים, על חפצים שימושיים ומתקנים ביתיים רבים, שצורתם דומה מאוד לצורת הפאונים הללו.

ניווכח כי כאשר טובלים את הפאונים הללו בתמיסת סבון - נאחזת בהם יריעה עדינה המקיימת בדיוק את משפט פלאטו.

נערוך את אפיון הפאונים בטבלה: על פי מספר הקדקודים, המקצועות, הפאות.
מתוך אפיון הפאונים בטבלה - ננסה אף לחפש קשר מתמטי בין מספר הקדקודים, המקצועות והפאות שבכל פאון (לקשר הזה קוראים: נוסחת אוילר).

א. ארבעון - טטראדר או טטרהדרון (פירמידה בעלת בסיס משולש) - זה עתה פגשנו בה.

ב. פירמידה בעלת בסיס מרובע.

ג. "דו-פירמידה בסיס משולש" כלומר: שתי פירמידות בעלות בסיס משולש מחוברות בבסיסיהן זו לזו.

ד. תמניון = אוֹקטָהֶדרוֹן. "דו-פירמידה בסיס מרובע". כלומר: שתי פירמידות בעלות בסיס מרובע, מחוברות בבסיסיהן זו לזו.

ה. מנסרה משולשת, פריזמה - ראו כמה הפתרון של הסבון חד וחלק: אין התלבטויות, הקווים יוצאים הישר אל קדקודי פלאטו!

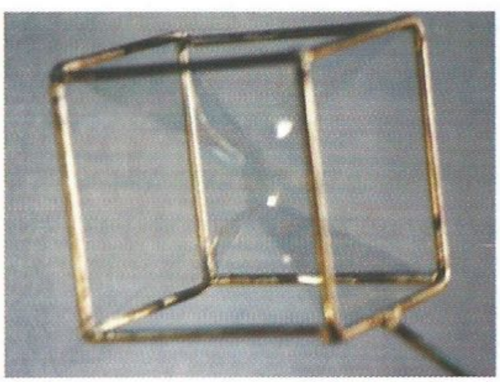
ו. קובייה היא שישון משוכלל. שישון הוא פאון בעל שש פאות, כמו: קובייה, תיבה, עמוד על בסיס מרובע.

שימו לב כי קווי התפר מתעקמים מעט - כך שיגיעו לקדקוד פלאטו בזווית הקסם ולא בזווית ישרה.

ז. קוביית דו-גג = שתי פירמידות מרובעות על קובייה.

ח. משטח גלים ודורגלים: יריעה של סבון. רעידות ותנודות. אופני תנודה וגלים עומדים.

ט. מזלג של סבון: קרוסלה לעת מצוא.



קובייה בסבון

כל פאון מאופיין על ידי מספר הקדקודים, המקצועות והפאות שבו.

נסמן את: מספר הקדקודים בפאון בסימן: (Vertex) V

מספר המקצועות בפאון בסימן: (Edge) E

מספר הפאות בפאון בסימן: (Face) F

טבלת אפיון הפאונים:

שם הפאון	תיאור/כינוי	מספר קדקודים V	מספר מקצועות E	מספר פאות F
ארבעון, טטראדר	פירמידה משולשת	4	6	4
	פירמידה מרובעת	5	8	5
	דו פירמידה משולשת	5	9	6
תמניון, אוֹקְטָהֶדרוֹן	דו פירמידה מרובעת	6	12	8
מנסרה משולשת	עמוד על בסיס משולש	6	9	5
שישון (קובייה, תיבה)		8	12	6
	קוביית דו גג	10	20	12

תרגיל:
נסו למצוא קשר חשבוני פשוט (המתאים לכל הפאונים הללו) בין מספר הקדקודים, המקצועות והפאות!

6. משפט אוילר

ליאונרד אוילר (Leonard Euler 1707-1783) היה אחד המתמטיקאים החשובים בכל הדורות. בשנת 1758 הוא פרסם את המשפט העוסק בפאון של אוילר:
פאון של אוילר הוא גוף קמור (סופי) המוגבל מכל עבריו על ידי "פאות" מישוריות ששוליהן מצולעים.
(הנחת הקמירות מבטיחה שלא ייווצרו מרחבים חלולים כמו "מערות".)

משפט הפאונים של אוילר:
כל גוף שאין בו חורים ושפאותיו שטוחות מקיים את משפט אוילר:

2 + מספר מקצועות E = מספר פאות F + מספר קדקודים V

המשפט מעניין, כיוון שאין כל חשיבות לצורת הגוף ולגודלו.

נוסחה זו הונצחה בבול שהונפק במזרח גרמניה בשנת 1983, לרגל מאתיים שנה למותו של אוילר.

חלק שני: הגופים המשוכללים –
אוקלידס, אפלטון, ארכימדס

אֶוּקְלִידֶס והפיתגוראים ביוון העתיקה הוכיחו כי ייתכנו רק **חמישה גופים משוכללים**, שכל פאותיהם הן מצולעים משוכללים זהים. הם כינו את הגופים הללו בשם "גופים משוכללים" או "גופים כלילי שלמות":

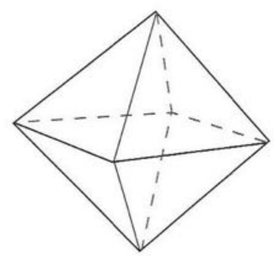
א. **ארבעון = טֶטְרָהֶדְרוֹן = טטראדר** - בעל ארבע פאות. פירמידה בעלת בסיס משולש.

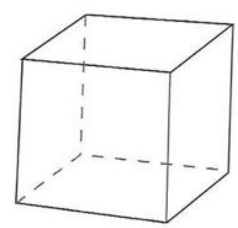
ב. **קובייה** - בעלת שש פאות.

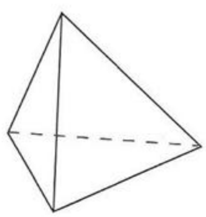
ג. **תְּמַנְיוֹן = אוֹקְטָהֶדְרוֹן** - בעל שמונה פאות: שמונה משולשים שווי צלעות.
בנוי משתי פירמידות מרובעות מחוברות - בסיס לבסיס.

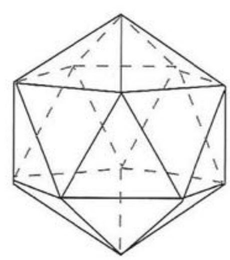
ד. **תְּרֵיסָרוֹן = דוֹדֶקַהֶדְרוֹן** - בעל שתים עשרה פאות של מחומשים משוכללים.

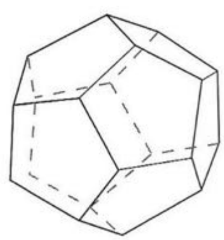
ה. **עֶשְׂרִימוֹן = אִיקוֹסַהֶדְרוֹן** - בעל עשרים פאות של משולשים שווי צלעות.


תמניון


קוביה


ארבעון


עשרימון


תריסרון

גופים אלה מופיעים בטבע בגבישים של מינרלים שונים ואפילו **ביצורים חיים**: בנגיפים.
כמה דוגמאות להופעת הגופים הללו בטבע:

1. גבישים של מינרלים.

למשל, גביש של מלח בישול מורכב מאטומים של נתרן וכלור הקשורים ביניהם במבנה קובייתי.

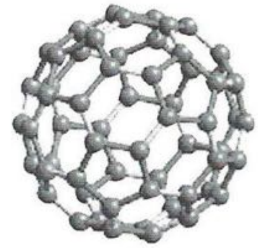
מבנה של ארבעון = טטראדר, אנו מוצאים במקרים רבים במולקולות של תרכובות פחמן רבות, וכן בסיליקון (צורן, מרכיב מרכזי בתעשיות האלקטרוניקה).

2. נגיפים: אצל חלק מהנגיפים, בנוי הקפסיד = המעטה החלבוני, בצורת עֶשְׂרִימוֹן = איקוֹסַהֶדרוֹן.

צורה זו מכתיבה את אופן התגבשותם של הנגיפים לגבישים גדולים יותר.

3. מולקולה חדשה - דמויית כדורגל: **פוּלֶרֶן**.

האדריכל האמריקני ריצ'רד בַּקְמִינְסְטֶר פוּלֶר (1983-1895) חזה שבניינים המבוססים על צורת עֶשְׂרִימוֹן = איקוֹסַהֶדרוֹן, יהיו חזקים וקלים במיוחד. מדענים נוכחו מאז לדעת כי אכן המבנה הזה מצטיין בשתי התכונות הללו גם יחד.
לאחרונה התגלתה תרכובת מיוחדת של פחמן, שבה כל מולקולה של החומר מורכבת מ-60 אטומי פחמן המסודרים בצורת כדורגל. מולקולה זו קרויה "פוּלֶרֶן" (קיצור של השם בקמינסטרפולרן Buckminsterfullerene), ולעתים מכנים אותה בחיבה: "כדור בקי" (buckyball), על שמו ולכבודו של ריצ'רד בקמינסטר פוּלֶר.



מולקולת פוּלֶרֶן

בתנאים מסוימים יכול גביש העשוי ממולקולות של פולרן (בתוספת "זיהום" של אטום אלקלי) לשמש כ"על מוליך", בעל התנגדות אפסית למעבר זרם חשמלי.
ובכן, היכרות עם תכונותיהם של הפאונים יכולה להביא לתוצאות ולהישגים בתחומי הארכיטקטורה והכימיה...

נחזור לעיין בחמשת הגופים המשוכללים של אֶוקלידֶס והפיתגוראים:

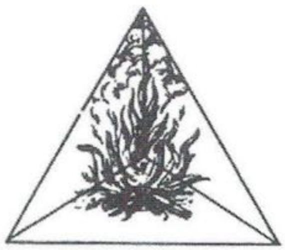
כיום אנו מכנים את הגופים הללו בשם "הגופים האפלטוניים", על שמו של הפילוסוף היווני הקדום אפלטון, שחי בשנים 348-429 לפני הספירה. אפלטון ניסה להסביר את הפיזיקה של היקום באמצעות המחקרים שערך על גופים אלו. הוא סבר שארבעה מחמשת הגופים שלעיל - מסמלים את ארבעת יסודות החומר:

הַאַרְבָּעוֹן (טֶטְרַהֶדְרוֹן) מסמל אש.
הקובייה מסמלת אדמה.
התמניון (אוֹקְטַהֶדְרוֹן) מסמל אוויר.
העֶשְׂרִימוֹן (אִיקוֹסַהֶדְרוֹן) מסמל מים.

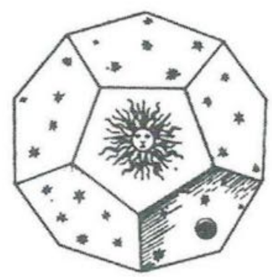
הגוף החמישי, התְּרֵיסָרוֹן הבנוי 12 מחומשים משוכללים, נועד על ידי אפלטון לייצג את הקוסמוס כולו כ"מיצוי החמישי" (quintessence).

משום כך, חמשת "הגופים המשוכללים" הללו, שמצאו הפיתגוראים, נקראים גם **חמשת הגופים האפלטוניים**.

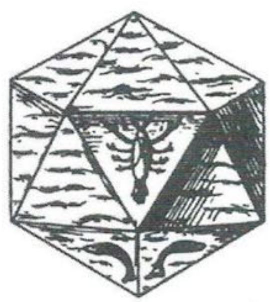
קובייה - אדמה



ארבעון - אש



תריסרון - היקום



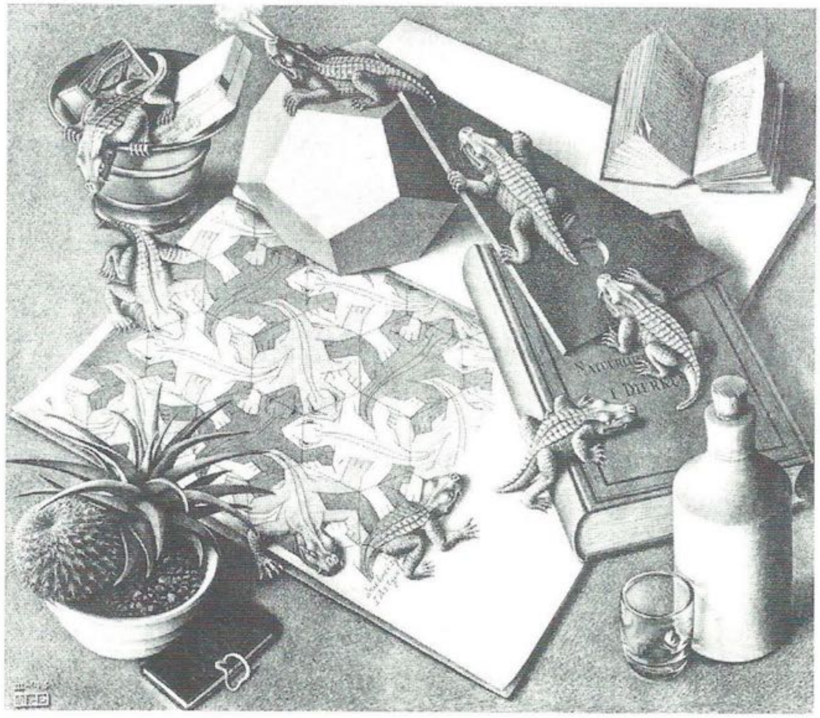
עשרימון - מים

תמניון - אוויר

מיכאל קוסטא (1985) מספר בספרו: "גשר בין שתי התרבויות", כי חשיבותו הרבה של התְּרֵיסָרוֹן = דוֹדֶקַהֶדרוֹן בהשקפת העולם האפלטונית באה לידי ביטוי באחד מציוריו של הצייר הגרפיקאי מ"ק אֶשֶר (M.C. Escher, 1898-1972). הציור נקרא: זוחלים (1943).

באיור רואים זוחל דו ממדי היוצא מתוך דף הנייר והופך לתלת ממדי. בדרכו הוא עובר על פני ספר זואולוגיה (!) וממנו אל התְּרֵיסָרוֹן = דוֹדֶקַהֶדרוֹן, שהוא פסגת היצירה המבטאת את היקום כולו. מכאן יכול הזוחל לחזור בשקט אל האפרוריות הדו ממדית שבאיור.

ציור של מ"ק אֶשֶר (M.C. Escher, 1898-1972): זוחלים Reptiles (1943).
מידע נוסף על הצייר אשר - ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק י'.



האלמנט החמישי

בשנת 1997 הוקרן ברחבי העולם הסרט "האלמנט החמישי", בכיכובו של ברוס וויליס. הסרט עוסק בארבעת היסודות של הטבע על פי הפילוסופים היווניים: **אש, אדמה, אוויר ומים, ובאלמנט החמישי**, המייצג את הקוסמוס כולו. זהו סרט מדע בדיוני, המתאר התרחשות עתידית במאה ה-23. כדור הארץ והאנושות נמצאים בסכנת הכחדה מוחלטת, ורק פעולה משולבת של ארבעת היסודות הללו בשילוב עם האלמנט החמישי - תוכל להציל את העולם מידי הרוע המוחלט. בעזרת אומץ לב, תושייה והמון אהבה, עולמנו ניצל.

הנה כי כן, רעיונות של גדולי הפילוסופים היוונים שבים ועולים בתרבות המערבית, לצד ניסיונות מדעיים להסביר את העולם שבו אנו חיים.

הערה: שימו לב כי חמשת הגופים המשוכללים הפיתגוראים/אפלטוניים, אינם כוללים כמובן גופים הנדסיים, שבהם ישנן פאות העשויות ממצולעים משוכללים שונים. למשל, פירמידה על בסיס ריבוע אינה חברה במשפחה המיוחסת. שהרי בסיסה - ריבוע, ושאר פאותיה - משולשים. על מנת "לעשות צדק" עם פאונים רבים נוספים, נרחיב את ההגדרות.

גופים ארכימדאיים

גופים ארכימדאיים הם פאונים שפאותיהם יכולות להיות מורכבות ממצולע משוכלל אחד מתוך קבוצה של מספר מצולעים משוכללים.
קיימים 13 "גופים אַרְכִימֶדְאִיים", מלבד אינסוף מנסרות פשוטות המקיימות הגדרה זו, שבהן הבסיס והראש הם מצולעים משוכללים, והדפנות הצדדיות - ריבועיות.

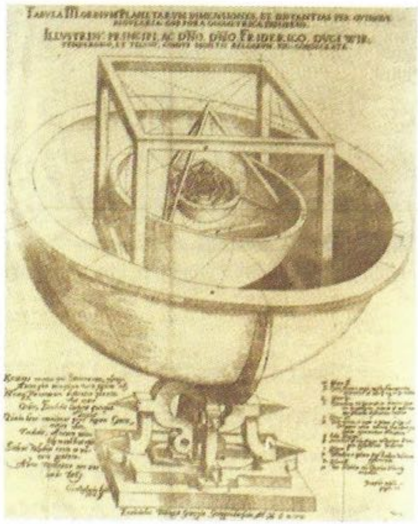
הנה כי כן, **הפירמידה בעלת בסיס ריבועי** היא חברה מכובדת במשפחה זו.
אפשר להוסיף לכאן בכבוד את הפאון העשוי כמו **כדורגל**: מחומשים משוכללים ומשושים משוכללים.
כזו היא מולקולת **הפולרן** שהזכרנו לעיל.

מידע נוסף על ארכימדס - בהערות אשר בסוף המבוא, בספר זה.

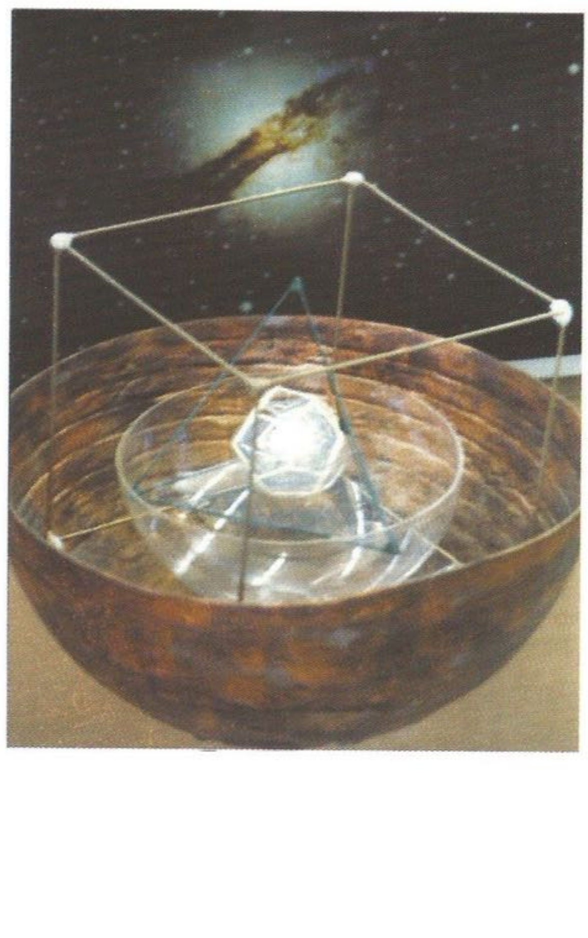
עוד הערה היסטורית: קפלר

יוהאנס קפלר (1571-1630), האיש שגילה את חוק תנועתם של כוכבי הלכת סביב השמש וניסח שלושה חוקים הנקראים על שמו, היה ביסודו מיסטיקן בעל מניעים אי-רציונליים, שפעל כחוקר מדעי בשיטות מחקר רציונליות. מטרתו של קפלר הייתה לגלות חוק המקשר בקשר גיאומטרי את מרחקיהם היחסיים של ששת כוכבי הלכת (המוכרים בתקופתו) מהשמש. קפלר האמין כי בטבע שוררת הרמוניה ולא יד המקרה. משום כך מידות מערכת השמש צריכות לקיים ביניהן יחסים הרמוניים גיאומטריים. בכל מחקריו של קפלר היה רעיון מדריך ברור: הרמוניה פירושה סימטריות גיאומטריות ופרופורציות מספריות פשוטות.
הואיל והשמש מוקפת שישה כוכבי לכת (ככל הידוע בתקופתו של קפלר), הרי קיימים חמישה רווחים בין מסלוליהם. קפלר קישר את חמשת הרווחים האלה עם **חמשת הגופים האפלטוניים**.
קפלר שיער כי מרחקי מסלוליהם של כוכבי הלכת מהשמש הם כאלה, שהכדורים משותפי המרכז שהם מגדירים - חוסמים בדיוק את חמשת הגופים האפלטוניים. בסופו של דבר, לאחר עיון מעמיק ומורכב בנתוני התצפיות האסטרונומיות - התברר

לקפלר כי השערתו - שאיפתו, איננה תואמת את העובדות הניסיוניות.
היה לו כל העוז והיושר המדעי להודות כי השערתו הראשונית הופרכה!
ואז יכול היה לבסס את תגליתו, את חוקי קפלר על תנועתם של כוכבי הלכת סביב השמש במסלולים אליפטיים.

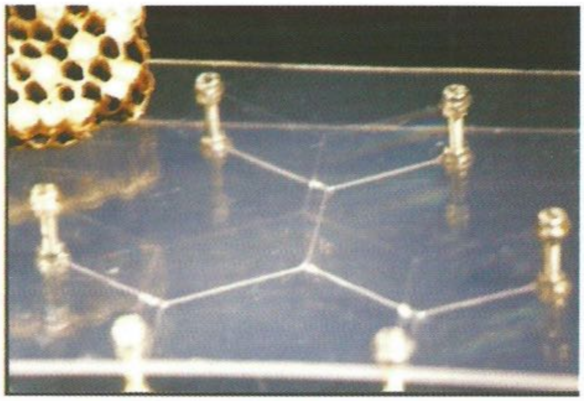


דגם של היקום על פי קפלר. הכדור החיצון הוא קליפת מסילת שבתאי.
סרטוט של חמשת הגופים האפלטוניים: כדורים החוסמים את הגופים וכדורים החסומים בהם.
מתוך ספרו הראשון של קפלר: 'סוד הקוסמוס' Mysterium Cosmographicum (1597, מהדורת 1621).



מודל מערכת השמש על פי קפלר
בנו: תלמידי המדעים באורנים,
קרן-אור פלד ומאיר ששון (1998)

חלק שלישי: על דבורים ועל חלת הדבש


קרומי סבון היוצרים משושים - מול חלת הדבש

ישנם יצורים רבים בטבע, הבונים מבנים מרשימים ומדהימים ביופיים וב"תכנונם" המשוכלל (אמיתי, 1995). בין אלו - מדהימים במיוחד הם המבנים שבונות הצרעות והדבורים הבנאיות.
כל פרט במלאכת הבניין הזו הוא פרי מלאכה נקייה ואלגנטית.

לא בכדי הכריז צ'ארלס דארווין:
"רק כסיל בלבד עשוי להסתכל במבנה המפליא של החלה, ההולם במידה כה מושלמת מטרות מסוימות, בלא להיתפס לרגש של השתוממות קיצונית" (חליפמן, 1959; בלום, 1974). מבין אלו, הידועה ביותר היא דבורת הדבש, הבונה את חלת הדבש. הקן, המכוּנֶה חלת הדבש, עשוי תאים משושים. הדונג - חומר הבנייה, נוצר בתאי הפרשה מיוחדים הנמצאים בגחון גופה של הדבורה. הדבורים אוגרות דבש ואבקת פרחים בתאי חלת הדבש - שם הן אף מגדלות את הוולדות.
לפני כאלפיים וחמש מאות שנה סבר אריסטו, כי הדבורים אוספות את הדונג מהצמחים. מתברר שלא כך הדבר. בחטיבת הבטן של הדבורה, בצדה הגחוני, מצויים ארבעה זוגות של בלוטות המפרישות דונג נוזלי.
בלוחיות הגחון ישנם נקבים זעירים רבים. משום כך הלוחיות מכונות "מראות הדונג". הדונג הנוזלי נקרש בבואו במגע עם האוויר והופך ללוחיות זעירות המועברות בעזרת הרגליים ללסתות של הדבורה. הדבורה לָשָׁה את הדונג בלְסְתוֹתיה ואז משתמשת בדונג לבניית תאים ולתיקון תאים פגומים. כדי להפריש דונג חייבת הדבורה לאכול דבש. מרון (1990) מציין כי ארבעה ק"ג דבש דרושים כדי לייצר ק"ג אחד של דונג. בנייה חסכונית של החלה מונעת בזבוז דבש לייצור הדונג, ואף מפנה זמן נוסף לייצור דבש. הדונג אינו ניתן בחינם בטבע - ולכן חשוב לחסוך בו.

הכוורת בנויה מאלפי תאים קטנים עשויים דונג. התאים בנויים כמנסרות בעלות בסיס משושה משוכלל. מעניין לברר את השאלה החברתית: מדוע משטר חברתי, כדוגמת זה השולט בכוורת, בוחר לו צורה משוכללת לבנייה.

אנו נשאל שאלה אחרת:
מדוע נבחרה צורת המשושה? על כך נרחיב בפרק י' העוסק בבעיית הריצוף. שם נראה כי ריצוף המישור בצורות משוכללות מכתיב שימוש במספר קטן מאוד של אפשרויות: משולשים, ריבועים או משושים - ותו לא.
נתבונן בסדרה של מצולעים משוכללים בעלי שטח קבוע.
(ראו פרק ז' - הדיון בבעיה של דידו כדוגמה לבעיה האיזופרימטרית = חקירת היחס בין היקף הצורה לשטחה).
היקפו של מצולע משוכלל ששטחו קבוע, הולך ופוחת עם עליית מספר הצלעות. משום כך, המשושה הוא המצולע שהוא גם אחד מהמועמדים לפתרון בעיית הריצוף וגם זה שהיקפו הוא החסכוני ביותר ביחס לשטחו.
מכך נובע כי כמות הדונג הדרושה לבנייתה של חלת-דבש בעלת נפח נתון תהיה החסכונית ביותר, אם נבחר לבנות תאים משושים.

לאחרונה, פורסמה הוכחה מתמטית חדישה ל"השערת חלת הדבש". השערה זו טוענת כי הדרך החסכונית ביותר (מבחינת אורך ההיקף) לחלוקת המישור למשטחים שווים, היא ריצוף משושים כמו בחלת הדבש.
ההוכחה הוצעה בשנת 1999 על ידי פרופ' תומס האלס (Thomas C. Hales) מאוניברסיטת מישיגן, ארה"ב. נוסח מתוקן של ההוכחה פורסם בשנת 2000.
מידע נוסף בדבר ההוכחה ומקורות לפירוט מלא שלה, ראו ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק י' העוסק בבְעיית הריצוף.

אם נתבונן בתאים המרכיבים את חלת הדבש, נוכל לראות כי עומקו של התא הוא כ-11.3 מ"מ.
אורכה של צלע המשושה הוא כ-2.75 מ"מ. וקוטר המשושה (= אלכסון גדול הוא בדיוק פעמיים הצלע): כ-5.5 מ"מ.
מידות אלו מתאימות לתא של "פועלת".
התאים שמהם יתפתח זכר גדולים במקצת: קוטרם 6.3 עד 7.4 מ"מ.
במרכז החלה קשור התא אל תא נגדי, שהכניסה אליו היא מצידה השני של החלה. כלומר תאי החלה מחוברים "גב אל גב" - על מנת להשיג חיסכון נוסף בדונג - חומר הבנייה היקר.
במאמרו בכתב העת "מדע" מתאר גרשוביץ (1982) את אופן החיבור של התאים הללו. אם סברנו כי תחתית התא שטוחה, הִנֵּה מתברר כי צורת התחתית של התא היא פינה משולשת.

ככל הנראה, החוקר הראשון שערך חקירה מדויקת של צורת תחתית התא של חלת הדבש היה האסטרונום האיטלקי מאראלדי (Maraldi). בשנת 1712 הוא מדד את זווית הפינה המשולשת של קדקוד התא ומצא שהיא בת 110^0 בקירוב. מאראלדי מצא כי אותה זווית מתקבלת גם בפינה של התא וגם בשולי תחתית התא. על פי חישוביו, התקבל כי אם זו אכן אותה זווית בדיוק - הרי היא צריכה להיות בת $109^0\ 28'$. לכבודו של החוקר הזה נקראת צורת הפינה הזו שבתחתית תאי החלה: פירמידת מאראלדי.

שורה ארוכה של חוקרים עסקו בשאלה מדוע מתקבלת דווקא הזווית הזו בתחתית התא של חלת הדבש. הסיפור המלא מתואר, כאמור, במאמרו של גרשוביץ, המכנה את הזווית הזו: זווית הקסם $109^0\ 28'$. נוסיף רק ונספר כי המתמטיקאי השויצי קניג (Samuel Koenig, 1712-1757) הוכיח, כי הדרך החסכונית ביותר לחבר את תאי הכוורת היא על ידי שימוש בזווית המיוחדת הזו. ההוכחה התבססה על **עקרון המינימום**.

ובכן, ראו זה פלא, בדרך כלשהי מצאו הדבורים את הדרך החסכונית ביותר לרצף את מישור חלת הדבש בתאים משושים (ובכך פתרו למעשה את בעיית הריצוף, תוך שימוש במשפט שטַיְנֶר...), ואף מצאו את הדרך החסכונית ביותר לחבר את תאי החלה גב אל גב (תוך שימוש בזווית הקסם ובמשפט פלאטו).

ברור כי אין לייחס לדבורים יכולת אנליטית לפתרון בעיות מתמטיות. התפתחות המינים במהלך האבולוציה העניקה יתרון במאבק ההישרדות - למי שבמקרה "עלו על הפתרון" החסכוני ביותר. מינים אחרים שרדו פחות. כך יכולה הייתה דבורת הדבש לסיים מהר יותר את מלאכת הבנייה של חלת הדבש ולהתפנות מוקדם יותר לייצור דבש. בתקופות של מצוקה ומחסור במזון, בתנאי מזג אוויר קשים במיוחד - היה בכך יתרון חשוב שאיפשר את הישרדותה.

מעניין עוד לציין כי אותה זווית הקסם מופיעה בתחומים רבים בטבע. אחד היפים שבהם, היהלום, נזכר כבר בראשית פרק זה.

הנה כי כן, בעזרת "קרומי הסבון ופתרון בעיות מתמטיות מן החיים" - התוודענו לתחומי ידע מגוונים ושונים מאוד ועמדנו על עקרונות מתמטיים המשותפים לכולם. הכרנו את עקרון המינימום המתאר את העובדה שתהליכים פיזיקליים מתרחשים על פי רוב בדרך החסכונית ביותר האפשרית. נוכחנו לדעת כי עיקרון זה עומד ביסוד תופעות טבע רבות בעולם החומר הדומם. זאת ועוד: ראינו כי במקרים מסוימים מציאת ה"מסלול החסכוני ביותר" נותנת יתרון למינים של יצורים חיים, ובכך מגבירה את כושר הישרדותם לאורך תקופות האבולוציה.

חלק רביעי: "הכוחות בשטח"

על מתח פנים ועל האלסטיות של קרומי הסבון

במהלך הדיון על "יכולותיו" המופלאות של הסבון, עלתה שוב ושוב השאלה: איך הסבון "יודע" למצוא מסלולים חסכוניים? ייחסנו זאת לתכונת מתח הפנים של קרום הסבון.

מתח הפנים של נוזל

על אטום או מולקולה בנוזל (למשל: אטום בכספית, מולקולה במים) הנתונים בתוך הנוזל - פועלים כוחות משיכה של שכנים מכל הכיוונים. משום כך סך כל הכוחות הפועלים עליהם הוא אפס. לעומת זאת, על אטום או מולקולה בשכבת פני הנוזל פועלים כוחות משיכה בין שכנים רק מצד הנוזל. לכן, סך כל הכוחות הפועלים על אטום או מולקולה בפני הנוזל, מכוון **פנימה** לכיוון הנוזל. כך מתקבלת שכבה צפופה וחזקה המהווה את קרום הנוזל. קרום זה הוא יריעה קפיצית, אלסטית. על מנת למתוח את היריעה הזו ולהגדיל את שטחה - יש להשקיע אנרגיה. האנרגיה ליחידת שטח מכונה בשם "מתח פנים". ניתן לבטא את מתח הפנים גם כאנרגיה ליחידת שטח וגם ככוח ליחידת אורך.

היואיט (1997) מסכם כך: "מתח הפנים הוא תוצאה של כיווץ פני הנוזל, הנגרם בשל כוחות משיכה בין המולקולות. מתחת לפני השטח, כל מולקולה נמשכת בכל הכיוונים אל המולקולות השכנות לה, ולכן, בסך הכול היא אינה נוטה להימשך לכיוון כלשהו. לעומת זאת, מולקולה המצויה בפני הנוזל נמשכת רק אל המולקולות שבצידיה ומתחתיה.

דבר אינו מושך אותה כלפי מעלה. דבר זה גורם לשטח הפנים לקטון עד כמה שניתן. פני השטח מתנהגים כקרום אלסטי."

מערכות פיזיקליות בטבע נוטות להשתנות באופן שהאנרגיה האצורה בהן, האנרגיה הפוטנציאלית שלהן, קטֵנה בתהליך השינוי. משום כך מערכת הנוזל וקרום מתח הפנים שלו "יחפשו" את המצב שבו האנרגיה הפוטנציאלית תהיה מינימלית. וזה המצב שבו שטח הקרום יהיה השטח המינימלי האפשרי באותה מערכת.

הסבר יפה ואלגנטי לכך נוכל למצוא ברשימתו של ד"ר אלכס רזניק: "מדוע מתכדרת טיפת נוזל", ברשימת המקורות בסוף פרק זה. בפרק ה' הזכרנו את צורתן הכדורית של טיפות הגשם באוויר, במהלך הדיון על היווצרות הקשת בענן.

מתח הפנים של המים גדול במיוחד בהשוואה לנוזלים רבים אחרים, עובדה המכתיבה במידה רבה את התנהגות המים:

על פי רוב יתכדרו טיפות המים לכדורים קטנים ויימנעו מיצירת יריעה שטוחה וגדולה.

הוספת סבון למים מקטינה את מתח הפנים של המים (פי שלושה) ומייצבת את הקרומים.

הסבון מונע מקרום המים להתבקע לטיפות כדוריות קטנטנות. מולקולות הסבון הן מולקולות קוטביות (פולריות) מבחינה חשמלית, והן יוצרות מִשְׁטח פנים כפול של מולקולות האוחזות יחדיו זו בזו. קרום הסבון בנוי משלוש שכבות: שתי שכבות של מולקולות הסבון או הדטרגנט, וביניהן שכבה של מולקולות המים (הממֵס).

דיון מפורט על כך ניתן למצוא בשני המאמרים של פרופ' זאב לוז ממכון ויצמן למדע, ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק ז'.

מקורות והערות לפרק ח'

המקורות וההערות על פי סדר הנושאים שנידונו בפרק:

1. מבנים קלים וחזקים - המתוכננים בסיוע קרומי סבון
2. משפט פלאטו: כיסוי של גופים מרחביים במשטחים מינימליים
   זווית הקסם, יוסף פלאטו
3. ליאונרד אוילר ומשפט הפאון שלו
4. הגופים המשוכללים - אוקלידס, אפלטון, ארכימדס
5. מולקולה חדשה - דמויית כדורגל: פוּלֶרֶן,
   האדריכל האמריקני ריצ'רד בַּקְמִינְסְטֶר פוּלֶר
6. האלמנט החמישי
7. יוהאנס קפלר
8. הדבורים וחלת הדבש - איך גילו הדבורים את משפט שְׁטַיְנֶר ומשפט פלאטו?
9. "הכוחות בשטח" על מתח הפנים ועל האלסטיות של קרומי הסבון
10. כיוונים נוספים לפרויקטים בין תחומיים.

1. מבנים קלים וחזקים - המתוכננים בסיוע קרומי סבון

על מבנים קלים וחזקים המתוכננים בעזרת מודלים של קרומי סבון:

קנט, א' (1995). מבנים קלים. *כמעט 2000*, גיליון 8 (מבנים), עמ' 40-43, 48.

המהנדס האמריקני בקמיניסטר פולר Fuller (הקשור למולקולות הפחמן פולרנים), פתח תקופה חדשה של תכנון מבנים קלים וחזקים. המאמר מתייחס למבנים פנאומטיים, המבוססים על קרומי מתיחה, כדוגמת המבנים הנוצרים על ידי קרומי סבון. מוזכרים בו כמה מבני ענק שנבנו על פי העקרונות של מבנים פניאומטיים בשילוב רשתות כבלים.

וורדרמן, ק' (1999). כיצד פועלת המתמטיקה. *האנציקלופדיה המדעית החדשה*. תל אביב: ידיעות אחרונות - ספרי חמד, משכל - הוצאה לאור והפצה.

על קרומי סבון - עמ' 142.
על פאונים - עמ' 150-152.
על משפט אוילר - עמ' 164.

2. משפט פלאטו: כיסוי של גופים מרחביים במשטחים מינימליים, זווית הקסם, יוסף פלאטו

גרשוביץ, ו' (1982). זווית הקסם '28 109^0. *מדע כ"ו* (4), עמ' 174-177, 192

Thompson D. W. (1956). *On Growth and Form*. Cambridge Un. Press (First ed. 1917).

דיון מעמיק **בבעיה של פלאטו**: "פתרונות ניסויים לבעיות מינימום בעזרת קרומי סבון", מאת: ריצ'ארד קוראנט והרברט רובינס, ראו ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק ז' (בסעיפים 2, 3).

על הפיזיקאי ג'וזף פלאטו (Joseph Antoine Ferdinand Plateau 1801-1883)

פיזיקאי בלגי שהתעוור עקב ניסוי שבו ערך תצפית ישירה בשמש.

Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990)

T. M. Rassias (ed), *The Problem of Plateau - A tribute to Josse Douglas and Tibor Radó* (Singapore, 1992)

כתבות:

Bergmans, C. (1903). *Joseph Plateau, Biographie nationale* 17, pp. 768-788.

Grosjean, C. C. & Rassias, T. M. (1992). Joseph Plateau and his works, in *The problem of Plateau*. NJ: River Edge, pp. 3-17.

אתרי אינטרנט על ג'וזף פלאטו:

http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Plateau.html

http://www.cinemedia.net/SFCV-RMIT-Annex/rnaughton/PLATEAU_BIO.html

http://www.newadvent.org/cathen/16067b.htm

תמונתו של פלאטו על גבי בול דואר בלגי:

http://www.th.physik.uni-frankfurt.de/~jr/gif/phys/s_plateau.jpg

3. ליאונרד אוילר ומשפט הפאון שלו

על משפט אוילר בעניין הפאונים:

פרנקל, א"ה (1957). *מבוא למתמטיקה*. כרך שני: האינסוף והמרחב. חטיבה שלישית: גיאומטריה (מחצית שנייה). ירושלים: הוצאת מאגנס, האוניברסיטה העברית. עמ' 321-325, 426.

על ליאונרד אוילר (Leonard Euler 1707-1783)

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics - an introduction*.
New York: HarperCollins College Publishers. Biography: Leonhard Euler (1707-1783), p. 503 Euler and the Beginnings of Topology. pp. 571-572.

4. הגופים המשוכללים - אוקלידס, אפלטון, ארכימדס

על חמשת הגופים המשוכללים האפלטוניים

ראו פרנקל (1957) בסעיף 3 לעיל.

קוסטא, מ' (1985). *גשר בין שתי התרבויות, מושגים והישגים בביולוגיה*. תל אביב: הקיבוץ המאוחד, ספרית פועלים, אורנים. על חמשת המוצקים האידיאליים של אפלטון, עמ' 15-17.

Katz, V. J. (1993). *A history of mathematics - an introduction*. New York: HarperCollins College Publishers. The five regular polyhedra. p. 87.

פאונים אחידים

אם מתירים לפאות לחתוך זו את זו, מתקבלים עוד 53 פאונים אחידים.

למשל: ניזכר בפאון המשוכלל תְּרֵיסָרוֹן = דוֹדֶקָהֶדרוֹן (בעל 12 פאות של מחומשים משוכללים).

אם נשנה אותו ל: דוֹדֶקָהֶדרוֹן די טריגונלי נקבל פאון המורכב מכמה דוֹדֶקָגוֹנִים שהם מצולעים משוכללים בעלי 12 פאות.

5. מולקולה חדשה - דמויית כדורגל, פוּלֶרֶן והאדריכל ריצ'רד בַּקְמִינְסְטֶר פוּלֶר

על מולקולת הפולרן - כדוגמה לפאונים משוכללים בטבע:

איקן, ר' (1995). "כדורגל" פחמני ושמו בקמינסטר פולרן. *כמעט 2000*, גיליון 5, עמ' 9-11.

המאמר מופיע גם באינטרנט במאגר כתבי העת של סנונית:

http://www1.snunit.k12.il/heb_journals/kimat2000/005009.html

ברנד, ר' (1994). גילוי הפולרנים או: כיצד להפיח חיים בפיח.

ידיעון כימיה בחברה המודרנית (כימיה טכנולוגיה וחברה), גיליון 60 / 59.

המאמר מופיע גם באינטרנט במאגר כתבי העת של סנונית:

http://www1.snunit.k12.il/heb_journals/chimia/59023.html

מנדלר, ד' (1994). פולרנים - מה הם מועילים?
ידיעון כימיה בחברה המודרנית (כימיה טכנולוגיה וחברה), גיליון 60 / 59.
המאמר מופיע גם באינטרנט במאגר כתבי העת של סנונית:
http://www1.snunit.k12.il/heb_journals/chimia/59031.html

פרס נובל לכימיה לשנת 1996 ניתן לסר הרולד קרוטו (Sir Harold Kroto), לרוברט קרל (Robert Curl) ולריצ'רד סמלי (Richard Smalley) על תרומתם בנושא הפולרנים.

אתרי אינטרנט על פולרן:
אתר על זוכי פרס נובל בכימיה: http://almaz.com/nobel/chemistry/chemistry.html

אתר קישורים לאתרים רבים העוסקים בפולרן:
http://www.warwick.ac.uk/staff/M.P.Barrow/fuller.html
מודול מדעי למערכת החינוך - אודות הפולרן:
http://wunmr.wustl.edu/EduDev/Fullerene/fullerene.html
http://wunmr.wustl.edu/EduDev/Fullerene/

מאגר נתונים אודות פטנט הפולרן:
http://www.godunov.com/Bucky/Patents.html

על האדריכל האמריקני ריצ'רד בַּקְמִינְסְטֶר פוּלֶר (Richard Buckminster Fuller 1895-1983).
שמואלי, ח' (1995). בקמינסטר פולר איש קטן גדול. *כמעט 2000*, גיליון 5, עמ' 11-13.
המאמר מופיע גם באינטרנט במאגר כתבי העת של סנונית:
http://www1.snunit.k12.il/heb_journals/kimat2000/005011.html

פוּלֶר, ריצ'רד בַּקְמִינְסְטֶר (1975). *האנציקלופדיה העברית*, כרך כ"ז עמ' 457-458. ירושלים: חברה להוצאת אנציקלופדיות.

ראו בסעיף 1 על מבנים קלים וחזקים המתוכננים בעזרת מודלים של קרומי סבון ותרומתו של המהנדס האמריקני בקמיניסטר פולר.

6. האלמנט החמישי

בשנת 1997 הוקרן ברחבי העולם הסרט: "האלמנט החמישי" מסרטי Columbia Pictures בכיכובו של ברוס וויליס.

אתר האינטרנט המתאר את הסרט: "האלמנט החמישי" ואת הרעיונות שביסודו:

MOVIEWEB: The Fifth Element

http://movieweb.com/movie/5thelement

7. יוהאנס קפלר וחמשת הגופים האפלטוניים

(Johannes Kepler, 1571-1630)

סמבורסקי, ש' (1981). אישיותו המדעית של קפלר. *מדע* כ"ה-1, עמ' 12-15, ועמוד השער הראשי.

פורטר, נ' (2001). קפלר - בין דת לדעת. *גלילאו*, גיליון 43, עמ' 65-71.

יוהנס קפלר, אחד המדענים הגדולים בכל הזמנים, הוא בעל ביוגרפיה מרתקת. מדען רציונליסט, שהיה ספוג במיסטיקה פיתגוראית; אדם דתי עד מאוד, שסירב לקבל דוגמות מסוימות. חייו היו רוויים מאורעות מסעירים, אולם קטנות היום יום העיקו על חייו מתחילתם ועד סופם.

קסטלר, א' (1970). *יוהאנס קפלר - האיש ופעלו.* תל אביב: ספרית מדע לעם, דביר ועם עובד. בייחוד עמ' 40-46 על חמשת הפאונים כלילי השלמות. וכן עמ' 208 א' דגם של היקום מתוך "סוד הקוסמוס" (1597, מהדורת 1621).

קרקובר, ז' (1988). *פיסיקה - חלק שלישי: כוחות.* ירושלים: המרכז ללימודים קדם אקדמיים, האוניברסיטה העברית, עמ' 378-383.

Fauvel, J. & Gray, J. (Eds.) (1987). *The history of mathematics - A reader.* London: Macmillan Press & The Open University.

Johannes Kepler, pp. 320-328. תמונות יפות

Katz, V. J. (1993). A history of mathematics - an introduction. New York: HarperCollins College Publishers. Biography:

Johannes Kepler pp. 373-379. תמונות יפות

אתרי אינטרנט על קפלר:

קפלר בבולים (בעברית), באתר של אורט:

http://mop.ort.org.il/scripts/publish/physics2_gen.asp?Par=300855&Num=16

אתרים נבחרים על קפלר:

http://www.kepler.arc.nasa.gov/johannes.html

http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Mathematicians/Kepler.html

http://es.rice.edu/ES/humsoc/Galileo/People/kepler.html

http://www.cvc.org/science/kepler.htm

8. הדבורים וחלת הדבש - איך גילו הדבורים את משפט שְטַיְנֶר ומשפט פלאטו?

אמיתי, פ' (1995). מבנים ובנאים בטבע. *כמעט 2000*, גיליון 8, עמ' 26-29.

המאמר מופיע גם באינטרנט במאגר כתבי העת של סנונית:

http://www1.snunit.k12.il/heb_journals/kimat2000/008026.html

בלום, א', אזנקוט, מ', אלקלעי, י', וקלינסקי, ב' (1974). *נגדל דבורים*. חלק ראשון ושני. משרד החינוך והתרבות - המרכז לתכניות לימודים. המכון לאמצעי הוראה. בייחוד חלק ראשון עמ' 32-44.

הורוביץ, מ' (1970). תולדות הכוורת. *מדע* ט"ו-4, עמ' 207-211.

חליפמן, י' (1959). *הדבורים - הביולוגיה והישגי המדע של הדבורים*. תל אביב: הקיבוץ המאוחד. פרק: מסד השעוה. עמ' 63-74.

מזרחי, א' (1982). על הדבש ועל העוקץ. *מדע כ"ו 2*, עמ' 72-77.

מזרחי, א' (1996). רק מלכה אחת. *ילדי טבע הדברים*, גיליון 9.

וכן ניתן למצוא את המאמר בכתובת האינטרנט:

http://www.galim.org.il/rosh/queen.html

מרון, ש' (1990). *הדבורה והפרח - חי וצומח בעונתו ובבית גידולו הטבעי - הצעת תכנית לימודים לבתי מדרש למורים*. המרכז הישראלי להוראת המדעים, האוניברסיטה העברית בירושלים. עמ' 61-65.

Michener, C. D. (1974). *The social behavior of the bees.*

Massachusetts: The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge. pp. 351- 358.

Michener, C. D. (2000). *The bees of the world*. Baltimore and London: The Johns Hopkins University Press.

אתרי אינטרנט העוסקים בענייני דבש, דבורים וכו'.

בעברית:

http://www.galim.org.il/rosh/queen.html

http://www.galim.org.il/rosh/bee.html

באנגלית:

http://www.honey.com/kids/index.html

מקורות נוספים על משושים:

ענבר, מ' (1982). משושים בזלתיים - כיצד נוצרו המבנים המשושים הנאים בזרמי לבה בזלתית בגולן ובאתרים רבים בעולם? *מדע* כ"ו 2, עמ' 61-63, 71.

9. "הכוחות בשטח" על מתח הפנים ועל האלסטיות של קרומי הסבון

ראו ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק ז', ובייחוד בסעיף 1: קרומי סבון ופתרון בעיות מתמטיות מן החיים.

היואיט, פ"ג (1997). *פיסיקה לכל - עקרונות מדע החומר והאנרגיה.* ירושלים: מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה. על מתח פנים: עמ' 222-224. (המהדורה האנגלית 1993.)

ניר, ש' (1991). *מכניקה.* ירושלים: הוצאת ספרים על שם י"ל מאגנס, האוניברסיטה העברית. פרק 15 מתח פנים, עמ' 383-402: דיון מקיף במתח הפנים, טבלת מתח פנים של נוזלים שונים, דוגמאות ויישומים.

קירש, י', בן-צבי, נ', יעקבי, ד', דנור, ר' ושפיר, י' (1977). *אטומים, מולקולות ותכונות החומר.* תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה. קורס מס' 20201. יח' 5, סעיף 5.4 מתח פנים: דיון בתופעות של פני שטח, אנרגיית שטח הפנים, מתח פנים של נוזל, טבלת ערכים של מתח פנים בנוזלים אחדים. יח' 12, סעיף 12.1 מתח פנים בחיי יום-יום ובתעשייה: דיון על צורתן הכדורית של טיפות הנוזל, אנרגיית שטח הפנים, חומרים פעילי שטח, דטרגנטים, בועות סבון.

דיון על מתח הפנים בספר ישן אך מעניין:

רוג'רס א"מ (1971). *פיסיקה לחקרן.* ירושלים: המרכז הישראלי להוראת המדעים על שם עמוס דה שליט, פרק 6.

רזניק, א' (1995). מדוע מתכדרת טיפת נוזל? *כמעט 2000* - כתב עת למדע וטכנולוגיה. גיליון 5 (כדורים), עמ' 26-28. כאן דיון יפה על מתח הפנים: האנרגיה ליחידת שטח. הטיפות כדוריות.

שמואלי, ח' (1997). הולכים על המים. *פי האטום*. כרך ו' גיליון 4, עמ' 8-9, 13.

לטאת הבזיליסק מסוגלת לחצות נחל או אגם בריצה מהירה, בהותירה את אויביה מעבר למכשול הבלתי עביר. איך היא עושה זאת?

בעלי חיים קטנים שמשקלם פחות משני גרם נעזרים במתח הפנים של המים. כאן, המקרה שונה.

על מתח הפנים של המים: אנקדוטה וניסויים

גלילאו גליליי עמל קשה לשכנע את בני דורו שיש לערוך ניסויים בטבע - ולא לסמוך באופן עיוור על דברי אריסטו. לשם כך דרושים היו לגלילאו כמה ניסויים שבהם יוכל להוכיח קָבָל עַם וְעֵדָה כי אריסטו טעה לעתים בניבוייו. לפני הניסוי הבא, נהג גלילאו לשאול את שומעיו מה אמר אריסטו על טבעו של הברזל כשהוא מונח על פני המים. השומעים מיהרו לצטט מדברי אריסטו כי טבעו של הברזל לשקוע מיד במים. ואז ערך גלילאו את הניסוי הבא:

הוא הניח סיכת פלדה בעדינות רבה על פני המים. הסיכה נותרה מונחת על קרום שטח הפנים של המים - ולא שקעה במצולות. קהל שומעיו של גלילאו נשאר פעור פה: אכן, הניסוי הוא השופט העליון המכריע, ולא דבריו של אדם זה או אחר.

ניסוי:

כיצד להניח סיכת פלדה על קרום מתח הפנים של המים מבלי לבקעו?

תחילה הניחו את הסיכה על פיסת נייר סופג. אחרי כן הניחו את הנייר (כאשר הסיכה מונחת עליו) על פני המים. הנייר שהוא גדול ורחב נשאר מונח על שטח גדול של פני המים, ולכן אינו מבקע את קרום מתח הפנים. אט אט הנייר סופג מים וצפיפותו הולכת וגדלה, עד שהוא שוקע מתחת לפני המים.

הסיכה נשארת על קרום מתח הפנים של המים ואינה שוקעת.

כדי להמחיש שאכן מדובר כאן במתח הפנים של המים - נוכל לערוך את הבדיקה הבאה: בשולי הכלי נחדיר בעדינות רבה טיפה של מים - דבר לא השתנה.

*כעת נחדיר בעדינות רבה **טיפת סבון** - מיד יתפזר הסבון על פני משטח פני המים. לכשיגיע לסביבת הסיכה - תיפול הסיכה מיד: קרום שטח הפנים של המים התפורר ונשבר.*

ניסוי מרתק נוסף הקשור למתח הפנים של המים והשפעת הסבון:

מניחים כמה קיסמים (למשל גפרורים קטומי ראש) על פני המים.

הקיסמים נתונים כעת בשיווי משקל: פועלים עליהם כוחות שטח הפנים המושכים אותם במידה שווה לכל כיווני הקרום שעל פני המים (מדובר בכיוונים אופקיים:

צפונה, דרומה, מזרחה, מערבה).

כעת, מטפטפים בעדינות רבה טיפת סבון ביניהם, במרכז הכלי.

אנו מבחינים בתנועה מהירה של הקיסמים החוצה לעבר שולי הכלי.

מה התרחש כאן?

הסבון שבר את קרום מתח הפנים במקום שבו הונח. בשאר השטח - קרום מתח הפנים עדיין מתוח.

הקרום המתוח בשולי הכלי מושך את הקיסמים כלפי חוץ.

למעשה, הופר שיווי המשקל של הכוחות שפעלו על הגפרורים, בכיוונים השונים של הקרום: הקרום במרכז הכלי - התפורר. ***למשך זמן קצר*** *הקרום בשולי הכלי עדיין פועל ומושך את הגפרורים החוצה.*

התוצאה: הגפרורים "נזרקים" ממש החוצה אל שולי הכלי.

נושאים מעניינים נוספים, הקשורים למתח הפנים ויכולים להוות נושאים מרתקים לחקירה ולגילוי:

צורתן של טיפות המים בעת נפילה חופשית באוויר.

צורתן של טיפות המים בעת נפילה בתווך צמיג כמו שמן.

צורתן של טיפות מים על משטחים שונים.

צורתם של פני המים בכלים מחומרים שונים.

הרטבה של מוצק בבואו במגע עם נוזל. זווית המגע.

נימיות: עליית מים בצינורות דקיקים.

העלאת מים בצמחים.

מתח הפנים בריאות בתהליך הנשימה.

צורתן של בועות סבון קטנות, וצורתן של בועות ענק.

מה עושה הסבון, כחומר מְשַטֵחַ הנוסף למים.

ועוד.

10. כיוונים נוספים לפרויקטים בין תחומיים בנושאי מתמטיקה - פיזיקה - כימיה - ביולוגיה

ספרים העוסקים בבניית מודלים מרחביים להמחשה של פאונים במרחב: הוראות בנייה וכו'.

Beard, Col. R.S. (1973). *Patterns in space*. Palo Alto, California: Creative Publications, Inc.

Laycock, M. (1970). *Dual discovery through: Straw polyhedra*. Palo Alto, California: Creative Publications, Inc.

ביבליוגרפיה רחבה יותר לעבודה בפרויקטים בדרך בית היוצר

בָּרק, ג'יימס (1988). *היום בו השתנה היקום*. תל אביב: ספרית מעריב. על פי ספר זה הופקה סדרת הטלוויזיה "קשרים".

ג'יימס ברק התפרסם בתכניות הטלוויזיה המבוססות על ספר זה. הוא אף זכה בפרסים של רשתות הטלוויזיה B.B.C ו-P.B.S על תכניות המדע והטבע הללו.

פרנקל, א"ה (1953-1965). *מבוא למתימטיקה - בעיות ושיטות מן המתימטיקה החדישה*. ירושלים: י"ל מאגנס, האוניברסיטה העברית ומסדה.

קוסטא, מ' (1990). *חתך הזהב, חותם שלמה ומגן-דוד: נושא בין-תחומי*. תל-אביב: ספרית פועלים, הקיבוץ הארצי השומר הצעיר.

אתר לחומרי העשרה במדעים המתעדכן מדי שבוע:

http://www.eduplace.com/science/

מקורות לפרויקטים במתמטיקה והיסטוריה של המתמטיקה

אונגורו, ש' (1989). *מבוא לתולדות המתמטיקה*. חלק א': הזמן העתיק וימי הביניים. חלק ב': הרנסנס והזמן החדש. תל אביב: האוניברסיטה המשודרת, משרד הבטחון.

דוזורצ'ב, י', ויניצקי, ג' וקופר, א' (1996). *תכנים היסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה*. חיפה: הטכניון - המחלקה להוראת המדעים.

ספר מעולה ובו אזכורים לבעיות מרתקות מתולדות המתמטיקה.

סעיף 12 מספרים טרנסצנדנטיים e ו- π עמ' 116-118.

סעיף 24 עוד על המספר π עמ' 142-144.

סעיף 25 ארבע הבעיות המתמטיות של העולם העתיק עמ' 145-146.

Swetz, F. J. (Ed.) (1994). *From five fingers to infinity - A journey through the history of mathematics*. Chicago and La Salle, Illinois: Open Court Pulishing Company.

על הבעיות הבלתי פתורות של הגיאומטריה היוונית עמ' 584.

על לינדמן, עמ' 669-670.

Calinger, R. (Ed.) (1995). *Classics of mathematics*. New Jersey: Prentice - Hall.

Calinger, R. (Ed.) (1996). *Vita mathematica. Historical research and integration with Teaching*. USA: The Mathematical Association of America.

Fauvel, J. & Gray, J. (Eds.) (1987). *The history of mathematics - A reader*. London: Macmillan Press & The Open University.

חמשת הגופים המשוכללים של אפלטון:

Plato's cosmology, Platonic solids, pp. 76-78

המודל השמימי, הגופים דמויי הכוכבים:

A celestial model, The stellated solids, pp. 324-327

בעמוד 327 מופיעה תמונה יפה של חמשת הגופים המשוכללים, והיסודות שהם מייצגים.

Archimedes p. 148

Swetz, F., Fauvel, J., Bekken,O., Johansson, B. & Katz, V. (Eds.) (1995). *Learn from the Masters*. The Mathematical Association of America.

Historical Notes - Mathematics Through the Ages (1992). Lexington, Mass: A project of the Consortium for Mathematics and Its Applications.

Reimer, W. & Reimer, L. (1992). *Historical connections in mathematics. resources for using history of mathematics in the classroom*. Fresno, California: AIMS Educational Foundation. Volume II (1993).

Historical Topics for the Mathematics Classroom. National Council of Teachers of Mathematics. 1969-1989

אתר חומרי העשרה במתמטיקה, מתעדכן מדי שבוע:

http://www.eduplace.com/math/

פרק ט':
יצירה לסבון ולצבע

בפרק זה נעסוק בכמה היבטים משלימים לדיון שלנו על קרומי סבון ועל פתרון בעיות מתמטיות מן החיים.
תחילה, נברר לעצמנו מהו מקור צבעוניותם של קרומי הסבון. שאלה זו עמדה ברקע מראשית המפגש שלנו עם הסבון, ואל לנו להתעלם ממנה עוד, שהרי התמיסה שקופה והקרום הדק צבעוני כל כך!
בהמשך, נתעמק בצדדים הטכניים: כיצד בונים מתקנים לעבודה בסבון, כיצד להכין תמיסה טובה של מי סבון.
בסוף הפרק נשתמש בקרום הסבון לחקור תופעות של גלים עומדים בפני השטח.
ברשימת המקורות שבסוף פרק זה אנו מביאים הפניות להמשך חקירה והעמקה בנושאים אלו והצעות לניסויים והדגמות. כאמור, מטרת הפירוט הרב במקורות והערות בסוף הפרק היא לאפשר למתעניינים להמשיך מכאן והלאה לפרויקטים נוספים של חקירה וגילוי.

ההתאבכות של גלי האור וצבעוניותם של קרומי הסבון

צבעוניותם של קרומי הסבון היא אחת התופעות המקסימות והמרתקות הקשורות לבועות הסבון. תמיסת הסבון היא שקופה במידה רבה, ואין בה כל רמז לעושר הצבעוני הרב המתגלה בקרומים ובבועות של הסבון. ואכן, מקור הצבע של קרומי הסבון איננו בחומרים הצבעוניים שבתמיסה, אלא דווקא בקרום הדק ובאופן שבו הוא משפיע על האור העובר דרכו ועל האור המוחזר ממנו.
נקדים כמה מילות הסבר.

פירוק האור הלבן למרכיביו

שני תהליכים פיזיקליים שונים מפרקים את האור הלבן למרכיביו הצבעוניים: נפיצה והִתְאַבְּכוּת.
הנפיצה קשורה לשבירה של האור במעבר מתווך שקוף אחד למשנהו. כל צבע נשבר במידה שונה. כך קורה שאלומה של אור לבן - מתפרקת וכל צבע נפוץ לכיוון אחר.

התופעה נראית בולטת במנסרה - פריזמה. את התופעה של נפיצת האור הלבן למרכיביו גילה סר איזיק ניוטון.

תחת קורת הגג של הנפיצה אנו מכירים את התופעות: **מנסרה וקשת בענן** (בקשת טיפלנו בפרק ה'). צבעוניות האור הנשבר ב**מנסרה** ומתנפץ למרכיביו ניכרת בקישוטי זכוכית, קריסטל ואבנים יקרות המלוטשות היטב.

התאבכות היא תופעה פיזיקלית הקשורה בגלים: האור הוא תופעה גלית ומתקיימות בו תכונות הגלים, לרבות התאבכות.

המילה התאבכות קשורה בעברית להתערבבות (עשן מתאבך באוויר, אבק עולה ברוח וכו'). ואכן, התאבכות של אור מתרחשת כאשר כמה קרני אור שונות "מתערבבות" זו בזו.

תופעת ההתאבכות באור באה לידי ביטוי בהרכבה (סופרפוזיציה) של גלים באופן שיוצר לעתים אור צבעוני מאור לבן.

התופעה ניכרת בשני אופנים עיקריים:

א. **התאבכות מקרומים דקים** (מכונה גם התאבכות בשכבות דקות), כמו קרומי סבון, קרומים דקים של שמן או נפט ומוצריו על פני המים ועוד.

הצבעים המרהיבים הנוצרים בקרום הדק הם תוצאה של התאבכות בין אור המוחזר משני משטחי הקרום: המשטחים המהווים את הגבול בין הקרום לתווך שמצדו האחד ומצדו האחר.

בקרומי סבון, עם הזמן, משתנה עובי הקרום עקב דליפת נוזלים והתאדות, ואז חלים שינויים בהתאבכות האור מהשכבות וניכרים שינויי צבע.

אלומה של אור פוגעת בשכבה דקה, בעלת מקדם שבירה אופייני. כל קרן אור הפוגעת בשכבת גבול שבין תווך שקוף אחד למשנהו, מתפצלת: חלק ממנה מוחזר כמו ממראה, וחלק אחר חודר לתווך השקוף הבא, תוך כדי שינוי כיוונו (שבירה). כל קרן המתקבלת מכך פוגשת שוב שכבת גבול ומתפצלת שוב, באותו האופן: חלק מוחזר וחלק נשבר ומועבר. וכך הלאה. התהליך חוזר על עצמו הן משכבת הגבול העליונה והן משכבת הגבול התחתונה של הקרום הדק. תוצאת התהליך היא זו: אלומת אור חזקה פוגעת בקרום, מתפצלת פעמים רבות, ואלומות רבות של אור **מקבילות זו לזו, משני צידי הקרום** נפלטות. האלומות הרבות המפוזרות מהקרום, מקבילות זו לזו ומתאבכות זו בזו. בכיוונים מסוימים זו התאבכות **בונה לצבע אחד**, והורסת לשאר הצבעים. וכך, מכל זווית נראית כל נקודה בקרום בצבע אחר. אנו יכולים לסכם את ההתרחשות בביטוי:

"הזווית היא הצבע!", כלומר לכל זווית מתאים צבע אופייני.

ב. **התאבכות מסריג משונן או מחורץ:** התאבכות מסריג **שקוף** ומסריג **מחזיר**, מתרחשת, כאשר אלומה של קרני אור פוגעת בסריג (תדריג מבריק משונן) צפוף מאוד.

סריג שקוף הגורם להתאבכות האור **העובר דרכו** נקרא סריג העברה או **סריג עקיפה** (transmission grating or diffraction grating), ואילו סריג מחזיר הגורם להתאבכות **האור המוחזר** ממנו נקרא **סריג החזרה** (reflection grating).

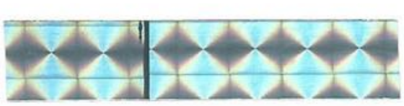
כל חריץ או שינון בסריג הופך למקור אור המפזר חלק מן האלומה שפגעה בו. כך מתקבלת שורה של מקורות אור מתואמים (בשל העובדה שכולם מפזרים אור של האלומה המקורית). כיוון שהמקורות הללו צפופים מאוד, הם גורמים לאור הנפלט מהם להתערבב באופנים שונים. להתערבבות זו אנו קוראים התאבכות. לכל צבע של אור - אורך גל אופייני משלו. כל צבע יוצר התאבכות בונה בכיוונים אחדים, והתאבכות הורסת בכיוונים אחרים. כך קורה שמכל כיוון נראה צבע אחר שעבר התאבכות בונה - בעוד שאר הצבעים עברו התאבכות הורסת ולכן אינם נראים.

אנו מכירים יצורים שונים בטבע, אשר חייבים את צבעוניותם לתופעת ההתאבכות מסריג: נוצותיהן של ציפורים כמו יונקי דבש או טווסים, כנפי פרפרים מבהיקים, חיפושיות, חרקים נוספים ורבים אחרים נראים מבהיקים בשלל צבעים וגוונים מתכתיים הודות לתופעת ההתאבכות מסריג.

(החזרת אור כזו מכונה לעתים בפי הביולוגים: יצירת צבעים "פיזיקליים" על ידי התאבכות.)

כמו כן אנו פוגשים בחיי היומיום מתקנים הגורמים להתאבכות מסריג: תקליט ישן (שחור), תקליטור CD = Compact Disk, סריג עקיפה (המוכר כמשקפיים ההופכות כל נקודת אור למקור צבעוני), וכן קישוטים מחומרי פלסטיק ממותך אשר מוטבעים בהם חריצים צפופים ואנו מכנים אותם: "נוצצים מחורצים".

- ה"נוצצים המחורצים" - יריעות פלסטיק ממותך (Metalized), שמוטבע בהן מבנה של סריג צפוף. באנגלית נקרא החומר: Textured Metalized Plastic Film.
(זהו מונח לשוני חדש שהוצע על ידי מחבר ספר זה לתיאור מוצר הקישוט החדיש הזה, הנפוץ מאוד כיום.)



כיצד בונים "כריכי סבון"?

חומרי הבנייה:

לוחות פרספקס שקופים בעובי של כ-3 מ"מ.

נשתמש ב"כריך" העשוי מזוג לוחות פרספקס שקופים המוחזקים במרווח קבוע של כ-20 מ"מ בעזרת ברגים מפלדת אל-חלד (נירוסטה).

לכל כריך דרוש זוג לוחות שצורתם מלבנית, רוחבם בין 15-25 ס"מ ואורכם בין 15-25 ס"מ, כך שחלק מן הזוגות הם בעלי ממדים של: 15x15, 15x20, 17x23, 20x25, 23x25 ס"מ.

ברגי אל חלד - נירוסטה, אומים ודיסקיות (כולם מפלדת אל חלד, שהיא עמידה בפני מי הסבון).

קוטר הבורג כ-4 מ"מ. אורכו כ- 33-36 מ"מ.

עבור כל בורג דרושות 4 אומים ו-4 דיסקיות שמידותיהן מתאימות לבורג.

לכל מתקן של כריך סבון דרושים בממוצע כ-7 ברגים.

תהליך הבנייה

קובעים את צורת המצולע שאנו רוצים לחקור, למשל: משולש, ריבוע, טרפז, מחומש, משושה.

קדקודי המצולע יהיו הברגים המגשרים בין לוחות הפרספקס.

מסמנים את קדקודי המצולע בתוך אזור הלוח שהכנו (יש להקפיד שלא להתקרב לקצה הלוח יותר מ-15 מ"מ, על מנת לא להסתכן בשבירת הפרספקס).

קודחים חורים בקדקודי המצולע, במקדח שקוטרו גדול מעט מקוטר הברגים שהשגנו.

למשל, עבור ברגים שקוטרם 4 מ"מ, נשתמש במקדח שקוטרו 4.5 מ"מ.

חוזרים על הפעולה הזו בדיוק גם עבור הלוח השני, כך שנקבל שני לוחות זהים בדיוק.

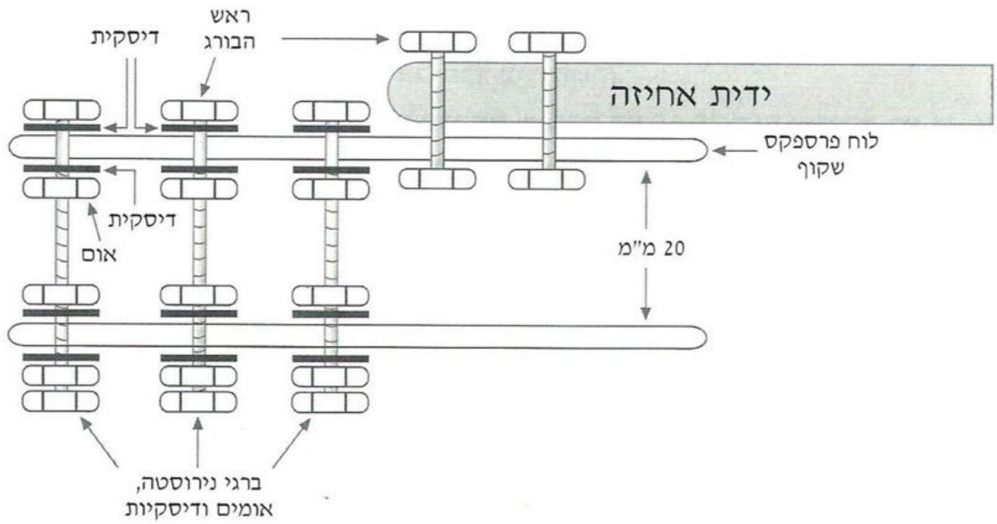
(ניתן לקדוח בזוג הלוחות ביחד - אם יש לנו כלים מתאימים להצמידם זה לזה בעת הקידוח.)

מובן **שיש להקפיד על כללי הבטיחות בעת הקידוח** - תוך השגחה של איש מקצוע מבוגר.

מרכיבים את הלוחות באופן שיהיו מקבילים זה לזה, במרווח הדרוש: כ-20 מ"מ ביניהם. ההרכבה מתבצעת על ידי התקנת הברגים בחורים שקדחנו - בקדקודי המצולע שאנו מייצגים בכריך הסבון הזה. יש לייצב כל לוח בין זוג אומים או בין אום לבין ראש הבורג. מומלץ ל"רפד" את הלוח הפלסטי בדיסקיות. במבט מן הצד ייראה כל בורג מורכב כך: ראש הבורג, דיסקית, לוח שקוף, דיסקית, אום, מרווח של כ-20 מ"מ,

אום, דיסקית, לוח שקוף, דיסקית, אום ואום נוספת לנעילה. (האום הנוספת לנעילה - אפשרית אך אינה הכרחית.)

מבנה כריך סבון - מבט מהצד:



ידיות פלסטיות נוחות

אפשר ורצוי להכין לכל כריך ידית פלסטית נוחה לאחיזה, ולחברה למתקן הכריך בשני ברגי אל חלד.

שימו לב:

הידית מחוברת רק ללוח אחד מבין לוחות הסנדביץ'.

הברגים מקוצרים, כך שלא יבלטו מהלוח הבודד ולא יחברו את המרווח שבין הלוחות.

מדוע? מה יקרה אם הברגים המחברים את הידית גם יגשרו על המרווח שבין הלוחות?

כל בורג המגשר על המרווח שבין הלוחות הוא עוד עוגן אחיזה לקרום הסבון, והוא מתפקד כמו קדקוד נוסף במצולע המיוצג על ידי כריך הסבון.

אילו מתקנים רצוי לבנות בכריכי הסבון

משולש שווה צלעות.

משולש שונה צלעות, ישר זווית.

משולש שונה צלעות, רצוי בעל זווית אחת קהה: מעל 90^0 אך מתחת ל-120^0. (מדוע? *)

משולש שונה צלעות, בעל זווית אחת קהה: מעל 120^0 (מדוע? *)

ריבוע.

---

* דיון רחב אודות צומתי שטינר במשולש קהה זווית - ראו בפרק ז'.

מרובע כלשהו שאינו ריבוע, למשל: טרפז שונה שוקיים.

מחומש משוכלל.

משושה משוכלל.

מתקן לבחינת אילוץ מסוג ראשון: איסור. הכריך עשוי חורים.

מתקן לבחינת אילוץ מסוג שני: מחיר, על ידי שלוש מדרגות של מרווחים.

מתקן לבחינת אילוץ מסוג שני: מחיר, על ידי מרווח המשתנה ברציפות: לוחות הכריך מתקרבים זה לזה.

מתקן המייצג את כל מדינת ישראל. אורך המודל 40-45 ס"מ, על פי מפה.

אפשר לשכלל ולהוסיף:

מתקן המייצג את בית הספר, את היישוב, את האזור של התלמידים. חיפוש מסלולים חסכוניים לחיי היומיום.

כיצד יש להיערך למדידת זוויות בין קרומי הסבון?

לכל זווית שחוקרים רצוי לבנות מד זווית שצבעו מייצג את הזווית הזו.

למשל בצהוב - זווית של שליש מעגל (120°).

(כזכור, טיפלנו בנושא זה בפרק ז'. אף על פי כן, מצאנו לנכון לשוב ולהזכיר כאן את ההנחיות לבנייה.)

הכנת מד-זווית שְׁטַיְנֶר

לוקחים גיליון פלסטי צבעוני ומסרטטים עליו עיגול ברדיוס של כ-7 ס"מ.

במרכז העיגול מסמנים זווית של 120°. מחלקים את ה"עוגה" לשלוש גזרות שוות.

גוזרים את העיגול לשלוש גזרות על פי הסימון.

קיבלנו שלושה מדי זווית שְׁטַיְנֶר - לזווית של 120°.

הכנת מד זווית פלאטו: מד זווית הקסם

לוקחים גיליון פלסטי צבעוני (למשל: ירוק) ומסרטטים עליו עיגול ברדיוס של כ-7 ס"מ.

במרכז העיגול מסמנים זווית של $109^\circ 28'$. אנו מכנים זווית זו: "זווית הקסם".

מד הזווית המיוחד (בצבע ירוק) שהכנו ייקרא להלן "מד זווית הקסם".

בכל מקרה שבו נרצה למדוד זוויות בין קרומי הסבון, נוכל לנסות ולהתאים את מדי הזווית שהכנו לזווית הנחקרת. אם תתקבל התאמה טובה בין מד הזווית לקרומי הסבון - מצאנו את ערכה של הזווית.

על פי הצורך, נכין דגמים של זוויות נוספות.

כזכור, יש להרטיב במי סבון את דגם הזווית - על מנת למנוע את ביקוע קרום הסבון בעת המגע ביניהם.

מתקנים מיוחדים לייצוג בעיות עם אילוצים

א. **אילוץ מסוג ראשון: איסור**

אנו רוצים לחבר מספר יישובים בכביש חדש, במסלול החסכוני ביותר האפשרי, אך **אסור** לנו לעבור בכל האזורים המגודרים.

נבנה מודל של כריך סבון בקנה מידה המבוסס על המפה המדויקת של השטח (בקנה מידה נוח).

מובן שהיישובים החשובים (אלו שאנו רוצים לחבר) מיוצגים על ידי ברגים המחברים בין לוחות הכריך.

נסיר מן הדגם את האזורים המגודרים וניצור חורים במודל.

כאשר נטבול את הדגם בסבון - נקבל את הפתרון המבוקש: המסלול החסכוני ביותר המחבר את היישובים תוך שהוא מקיף את האזורים המגודרים - האסורים.

הערה: לעתים צריך להעביר אצבע יבשה דרך החורים שבמודל - כדי לבקע את קרום הסבון שכיסה על החורים. לאחר שיתבקע הקרום באזור האסור - יתקבל הפתרון המבוקש.

ב. **אילוץ מסוג שני: מחיר**

אנו רוצים לחבר שני יישובים במנהרה, האחד על גב ההר, השני ברצועת החוף, כך שעלות הפרויקט כולו תהיה החסכונית ביותר.

סוג הקרקע משתנה ועלות החפירה משתנה בהתאם: רצועת החוף, השפלה וההר. (דיון מקיף בבעיה זו נערך בפרק ז'.)

יש לבנות מודל המכיל בתוכו את תנאי הבעיה: נבנה דגם על פי מפה ונדאג לכך שהמרווח בין הלוחות בכל רצועה יהיה מתכונתי למחיר העלות בכל אזור (יותר יקר - יותר מרווח).

נטבול את הדגם בסבון ונוציא אותו החוצה: אט אט הסבון מתייצב על המסלול החסכוני ביותר.

מתקבל קו שבור המחבר את שני היישובים במסלול החסכוני ביותר.

אפשר לבנות גם מודל שבו המרווח בין לוחות הכריך משתנה בהדרגה ובאופן רציף: למשל, זוג לוחות מלבניים הנפגשים לאורך צלע אחת, ומרחקם הולך וגדל לכיוון הצלע הנגדית.

בניית "הכוחות בשטח" - הכנת מתקנים לחקר האלסטיות של קרומי הסבון

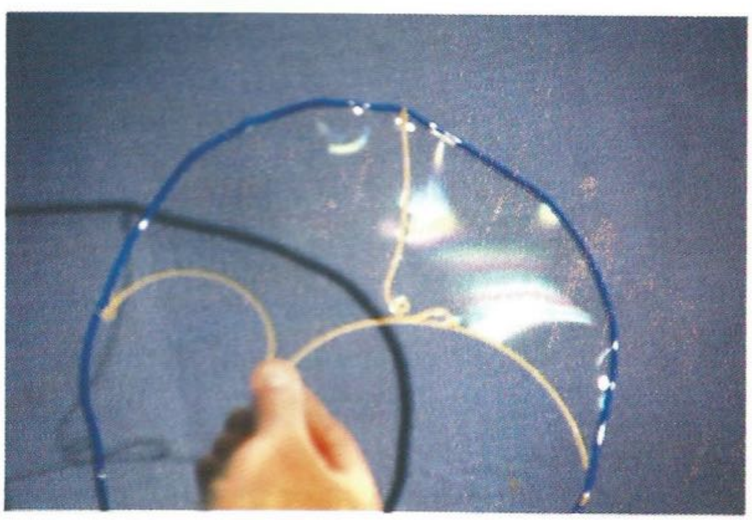
כאן נציע מתקנים פשוטים לחקירת כוחות שטח הפנים של קרומי הסבון. המתקנים הללו מסייעים לנו להתנסות ולחוש בעוצמתם הרבה של קרומי הסבון ולראות כמה כוחות אגורים במתיחותו של הקרום האלסטי הזה. אפשר אפילו לשמוע את קולות המפץ והקריעה של קרום הסבון כשהוא כבר מתבקע.

1. **חוטי תפירה - גבולות מוכרים ובטוחים**

זהו מתקן העשוי מלולאה של חוט חשמל קשיח שנוח לכופפו ולעצב את צורתו. קוטר הלולאה כ-20 ס"מ. רצוי להכין ידית נוחה.

בתוך הלולאה הקשיחה אנו קושרים חוטי תפירה גמישים, רפויים למדיי, המחלקים את הלולאה לשלושה או לארבעה תחומים. נכנה אותם: "רבעים" - כמו חלקי העיר.

טובלים את המתקן כולו במי סבון. נוצר קרום של סבון המכסה את כל הלולאה ומכיל את חוטי התפירה. כעת מבקעים את הקרום באחד הרבעים.



יריעת סבון מוגבלת בחוטי תפירה

מה קורה?

מה קורה לחוטי התפירה שעד כה היו רפויים לחלוטין? מה צורת הגבול הגמיש שנוצר מחוטי התפירה?

נסו לגעת (ביד רטובה במי סבון) בחוט התפירה ולמתוח אותו. מה יקרה כשנרפה?

נסו להקשיב בשקט ברגע שקרום הסבון יתבקע. מה שומעים?

2. **נדנדה של כפתורים**

נבנה מתקן דומה. שוב ניצור מסגרת עגולה מחומר קשיח. בתוכה נקשור חוט תפירה רפוי, שקשורים בו שני כפתורים קלים. בשליש הדרך ובשני שליש הדרך.

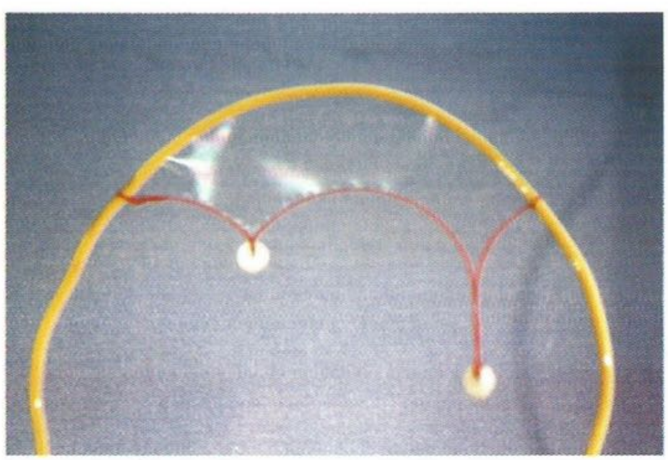
נטבול את המתקן בסבון. נבקע את הקרום שמתחת לחוט ולכפתורים.

מה קורה? קרום הסבון משך עד כה את החוט משני צדדיו. החוט היה נתון בשיווי משקל ונראה רפוי.

מרגע שנבקע קרום הסבון מצדו האחד של חוט התפירה - נשתבש שיווי המשקל. כעת פועלים על החוט כוחות משיכה של קרום הסבון - רק מצד אחד. החוט נענה לפעולת הכוח ונמתח לצד הסבון.

הכפתורים, הכבדים יחסית, נמשכים כלפי מטה. קרום הסבון מושך כלפי מעלה. מתקבלת נדנדה של כפתורים. כעת אפשר לחוש ולהתרשם מה רבה עוצמתו של קרום הסבון!

כמה כוחות גלומים בקרום שטח הפנים של הסבון.



קרומי סבון מותחים יריעה אלסטית על פני קו השפה

קו השפה יכול להיות עשוי מחוט תפירה פשוט ואף לשאת "משקולות" של כפתורים. ניתן ממש לחוש את כוחות שטח הפנים של קרום הסבון!

3. **כדורים פורחים של סבון - בועות ענק**

כיצד להיכנס לתוך בועה?

ניתן ליצור בועות ענק בעזרת לולאה גדולה הטובלת במי סבון. לאחר אימון קל אפשר ליצור בועות כאלו שיקיפו ילד או מבוגר.

4. **רשתות בעלות חורים שונים: ים של בועות**

נוכל להצטייד בכמה רשתות פלסטיות בעלות חורים בגדלים שונים: מחורים בקוטר של כמה מילימטרים, ועד חורים בקוטר של כמה סנטימטרים. נטבול את הרשת בתמיסת מי סבון.

כעת ניתן לנשוף על הרשת רוח קלילה, או להציבה מול מאוורר, או פשוט לנער אותה הלוך ושוב באוויר. מתקבל ים של בועות - אשכולות אשכולות.

איך בנוי קצף של בועות קטנות וצפופות? ננסה להתבונן בקצף דרך זכוכית מגדלת.

קרום הסבון כולא בתוכו נפחים נפחים של אוויר שנלכד בסבון בעת הניפוח. האלסטיות של קרומי הסבון גורמת לכך שהמעטפת של הנפחים הללו תהיה חסכונית ככל האפשר. לבועה בודדת, המעטפת החסכונית ביותר היא כדור. לאוסף של בועות צמודות זו לזו, המעטפת החסכונית ביותר היא אשכול הבועות הנראות כקצף. מבט חד עין יגלה לנו כי בין הבועות שבאשכול מתקיים משפט פלאטו בדיוק רב:

זוויות של 120° בין המישורים המחוברים בקו תפר וזוויות של $109^\circ\ 28'$ בין קווי התפר המתחברים לקדקוד משותף.

בניית סריגי סבון מרחביים

נכין מתקנים אחדים כדי לחקור בעיות של קרומי סבון במרחב התלת ממדי.

לבניית הסריגים נשתמש בחומר קשיח כמו חוט חשמל עבה, מוטות פלסטיים מחוברים במחברים או מוטות פלדה מרותכים. אם משתמשים במוטות פלדה מרותכים - רצוי להשתמש במוטות נירוסטה, כדי שלא יחלידו, או במוטות פלדה שעברו תהליך של גילוון לצורך ציפויים בשכבת אל חלד.

1. **אוכף**

בונים לולאה בקוטר של כ-20 ס"מ ומחברים אליה ידית נוחה. מכופפים אותה מעט סביב קו הקוטר, כך שהלולאה אינה עוד מישורית. כעת הלולאה היא דמויית אוכף.

2. גג של בית דו-מפלסי

בונים שתי מסגרות מלבניות או ריבועיות - כך שכל אחת תהיה במפלס אופקי אחר.

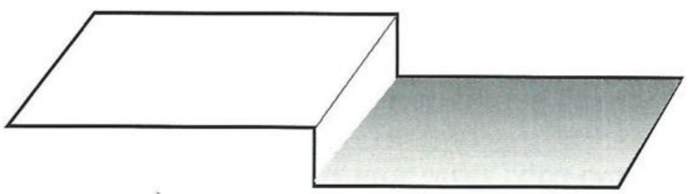
מניחים אותן - זו מעל זו תוך חפיפה חלקית.

מחברים בין המסגרות על ידי שני עמודי פינה.

מסירים את המוטות שבאזורי החפיפה של שתי המסגרות.

מתקבלת צורה שהיא מסילה סגורה, חלקה במפלס אחד וחלקה במפלס אחר.

מתקן זה מייצג את קו המיתאר של גג שטוח דו-מפלסי של בית בודד.



פאונים

1. **ארבעון - טטראדר או טטרהדרון** (פירמידה בעלת בסיס משולש.)

בונים פירמידה בעלת בסיס משולש, ממקצועות שווים באורך של כ- 12-15 ס"מ.

ניתן לחבר ידית נוחה.

מעניין למדוד זוויות בין המישורים המתקבלים וכן למדוד זוויות בין קווי התפר המתקבלים.

2. **פירמידה בעלת בסיס ריבועי.**

בנויה ממקצועות שווים באורך של כ- 12-17 ס"מ.

3. **דו-פירמידה משולשת** = שתי פירמידות בעלות בסיס משולש המשותף לשתיהן.

בנויה ממקצועות שווים באורך של כ- 15-18 ס"מ.

4. **תמניון, אוֹקטָהֶדרוֹן** = דו פירמידה מרובעת = שתי פירמידות בעלות בסיס ריבועי המשותף לשתיהן.

בנויה ממקצועות שווים באורך של כ- 15-18 ס"מ.

5. **מנסרה משולשת** = פריזמה = עמוד בעל בסיס משולש.

מקצוע הבסיס, אורכו כ-15 ס"מ. מקצוע העמוד אורכו כ- 25-30 ס"מ.

6. **קובייה**.

בנויה ממקצועות שווים באורך של כ- 9-15 ס"מ.

7. **קוביית דו-גג** - קובייה שעל בסיסיה (הבסיס העליון והבסיס התחתון), צמודות שתי פירמידות בעלות בסיס ריבועי המשותף לבסיסי הקובייה. בנויה ממקצועות שווים באורך של כ- 8-10 ס"מ.

נספח – ציוד נלווה:

בריכת סבון בגודל נוח לעבודה. למשל: גיגית באורך כ-60 ס"מ, רוחב כ-40 ס"מ, עומק כ-25 ס"מ.

סבון נוזלי מתאים. ראו הצעות הכנה - בהמשך פרק זה.

ערכת צינוריות. "קשית" של שתייה קלה ועוד.

מדי זווית לזוויות המיוחדות המתקבלות בסבון: $109^0\ 28'$, 120^0.

ערכת הדגמה למשחק ילדים להמחשת הבעיה של דידו: הבעיה האיזופרימטרית.

ערכת הדגמה לכוחות מתח הפנים בסבון: לולאות עם חוטי תפירה, כפתורים וחרוזים.

ערכת ייצור בועות סבון ענקיות.

רשתות פלסטיות בעלות חורים שונים ליצירת בועות וקצף.

מתקן וילון הסבון: מתקן ליצירת יריעה ענקית של סבון, בין גבולות של מסגרת הניתנת להרחבה.

מגש וסכין לחיתוך בועות הסבון - יצירת בועות שכנות וחקר הזוויות ביניהן.

מאמרים וביבליוגרפיה.

תערובת טובה לבועות סבון

הכנת תמיסת הסבון היא אומנות שרבים ניסו את כוחם בה, משום כך גם רבות העצות.

בספרו *בועות סבון והכוחות המעצבים אותן*, מתאר צ'ארלס ורנון בויס, את שיטתו להכנת תמיסה טובה לבועות סבון (בויס, עמ' 112-113). בויס מספר שהוא שכלל את שיטתו של פלאטו.

שיטתו של בויס:

משתמשים בסבון כביסה רגיל בתוספת גליצרין טהור, במים מזוקקים או לפחות במים רכים ככל האפשר.

הוראות ההכנה:

יוצקים לתוך בקבוק נקי מים עד שלושה רבעים מקיבולו.

מוסיפים מלח נתרני של חומצה אולאית (סבון טהור העשוי משמן זית זך) כדי החלק הארבעים ממשקל המים.

סוגרים את הבקבוק בפקק ומניחים יום אחד לצורך התמוססות הסבון.

מוסיפים לבקבוק גליצרין טהור עד שיתמלא כמעט לגמרי - ומנערים היטב.

מניחים לשבוע ואז שואבים מתחתית הבקבוק את התמיסה הנקייה - ללא החלק הצף עליה מלמעלה.

לכל חצי ליטר נוזל מוסיפים טיפה אחת או שתיים של תמיסת אמון מרוכזת.

אין לחמם ואין לסנן את התמיסה. התמיסה מתקלקלת באוויר החופשי.

הכנת תמיסת סבון בבית היוצר:

מבירורים שערכתי התבררו לי הפרטים הבאים:

- הדטרגנטים המיוצרים כיום לשימוש ביתי יוצרים קרומי סבון מצוינים ללא כל תוספות והכנה.

  משום כך ניתן לקצר בהרבה את תהליך הכנת התמיסה ליצירת קרומי סבון.

  למעשה, מעט סבון נוזלי לרחיצת כלים ומים - והרי לכם תמיסת סבון מעולה!

  אף על פי כן, המעוניינים לשפר ולהעמיק בנושא - יוכלו לעיין בסעיפים הבאים.

- יש חשיבות רבה לאיכות המים שאנו משתמשים בהם, ומים אלו שונים מיישוב ליישוב, ואף מתקופה לתקופה באותו יישוב. גם טמפרטורת המים משפיעה במידה מסוימת על איכות התמיסה המתקבלת.

  כיוון שעל פי רוב לא נוכל להשתמש במים מזוקקים או אפילו לא במים רכים לצרכים לימודיים, הרי עלינו להכין את התמיסה בצורה זהירה והדרגתית - תוך שאנו מוצאים את המינון הנכון לתנאי המערכת.

- הסבון הנוח לביצוע הניסויים הללו הוא סבון נוזלי פשוט - לרחיצת כלים בבית. לא כל כך משנה מאיזה יצרן... נציין כי אצל כל יצרן - ישנה שונות מסוימת בין התוצרים שהוא מייצר, מסדרת ייצור אחת לאחרת. משום כך בכל ניסוי, הסבון שונה במעט, ולכן, גם מסיבה זו, אין לנו נוסחה אחת מוחלטת - אלא יש להגיע למינון הנכון "בזחילה" - כלומר תוך כדי הוספה הדרגתית של סבון לתמיסה ובדיקתה.

- חשוב להבין כי **תפקיד הסבון הוא להקטין את מתח הפנים של המים**. בלא סבון - למים יש מתח פנים חזק מאוד והם נוטים להסתדר כטיפות כדוריות - ולא לאפשר קרום שטוח. תפקיד הסבון אם כן הוא להוות חומר מְשַׁטֵחַ המאפשר למים להתפרס בקרומים גדולים. ואכן הסבון מקטין את מתח הפנים של המים לכדי שליש מערכו במים רגילים. מכאן יובן כי מי שמחליט להיות נדיב בסבון ו"לשים הרבה סבון כדי לקבל קרום חזק לבועת הסבון..." טועה לחלוטין. אם נשים הרבה סבון - הקרומים ייחלשו מאוד ויתבקעו מיד.
- עלינו למצוא את המינון הנכון, המתאים לתנאי המים שלנו, לסוג הסבון הנוזלי שברשותנו ולתנאי הסביבה (טמפרטורה, לחות יחסית).

מתחילים עם מים נקיים ורכים ככל האפשר. מוסיפים סבון בכמות שהיא בערך החלק ה-60 מכמות המים, על פי הנפח. מערבבים בזהירות - כדי שלא ייווצרו בועות וקצף (אלו מפריעים להדגמות במתקני הסבון). וכך, ממשיכים "בזחילה": מוסיפים מעט סבון ובודקים את איכות הקרום המתקבל. וחוזר חלילה, עד שמתקבל קרום סבון חזק ויציב.

- כיצד בודקים?

טובלים לולאה של חוט קשיח (למשל חוט חשמל קשיח, מצופה בידוד פלסטי) בקוטר של כ- 10-25 ס"מ, שולפים אותה מהתמיסה ובודקים אם הקרום יציב וחזק ואם ניתן לייצר בועה יציבה.

על פי הצורך מוסיפים בהדרגה עוד מעט סבון.

נדגיש: אין לעבור על כמות הסבון שכבר נתנה קרום יציב. כל המוסיף - גורע!

אם טעינו והוספנו יותר מדי סבון - ניתן להוסיף מים ולחזור למינון הרצוי.

אפשרויות שונות להכנת תמיסת הסבון

הערה: יחידות הנפח המצוינות כאן יכולות להיות כל כלי קיבול נוח: כף, כוסית, ספל, קומקום וכו'. היחסים המופיעים להלן ניתנים בתחום רחב מאוד של ערכים, מהסיבות שצוינו לעיל: בשל השונות הגדולה באיכות הסבון ואיכות המים, בשל תחומי הטמפרטורה השונים, הלחות היחסית של האוויר (הגורמת לייבוש הקרום) וכו'.

א'

1 יחידת סבון כלים נוזלי : 40 - 80 יחידות מים

ב'

1 יחידת סבון כלים נוזלי : 25 יחידות מים : 0.25 יחידות גליצרין

ג'

1 יחידת סבון כלים נוזלי : 3 יחידות מים : 0.5 - 2 יחידות גליצרין

ד'

1 יחידת סבון כלים נוזלי : 1 יחידת מים : 1 יחידת גליצרין

הצעות מאתר האינטרנט של האקספלורטוריום:

San Francisco Exploratorium Bubbles Web pages:

http://www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/bubbles.html

ראו באתר זה כמה הצעות לתמיסות סבון יציבות.
כדי לפענח את ההמלצות הניתנות באתר זה, יש לתרגם את הכמויות הנתונות ליחידות מוכרות.
לאמריקנים ישנן יחידות מידה שונות - שיהיו בריאים...
ניעזר בכמה נתונים מתוך פרסומי המכון הלאומי האמריקני לתקנים וטכנולוגיה, כפי שהם מופיעים ברשימת המקורות וההערות בסוף פרק זה.
חישבנו בדיוק רב את היחסים בין נפחי המרכיבים השונים - אך כפי שהבהרנו בראשית דברנו, אלו יחסים מקורבים בלבד, ובכל מקרה יש לנסות ולהתאים את המינון לסוג החומרים המרכיבים את התמיסה.

להלן יחסי כמויות הנוזלים, על פי הנפח, להכנת תמיסת סבון יציבה וחזקה.

הצעה א' - בתערוכות האקספלורטוריום

2/3 ספל סבון כלים נוזלי : 1 גלון מים : 2.5 כף גדולה גליצרין.

היחס: 1 יחידת סבון כלים נוזלי : 24 יחידות מים : 0.234 יחידות גליצרין

הצעה ב' באקספלורטוריום - מ"מרסיה" בקנדה

1 ספל סבון כלים נוזלי : 12 ספלים מים : 3/4 כף גדולה גליצרין.

היחס: 1 יחידת סבון כלים נוזלי : 12 יחידות מים : 0.047 יחידות גליצרין

יש לבחוש את המרכיבים הללו בעדינות, לערבבם היטב, ולהשאיר את התערובת למשך הלילה במכל פתוח.
לכל סוג של סבון נוזלי - יש למצוא את המינון המתאים.

הצעה ג' באקספלורטוריום - תמיסת סבון לאורך זמן

1/3 ספל סבון כלים נוזלי : 1/3 ספל מים : 1/3 ספל גליצרין.

היחס: 1 יחידת סבון כלים נוזלי : 1 יחידת מים : 1 יחידת גליצרין

זוהי תמיסה כבדה בשל כמות הגליצרין הגדולה.

גלים עומדים בקרום הסבון

ניתן לערוך סדרה של הדגמות וניסויים ביריעת הסבון המשמשת כתוף: משטח גלים.

אופני תנודה נורמליים ביריעת הסבון:

ניתן לאחוז ביד מסגרת מלבנית גדולה שנטבלה בתמיסת סבון, ולנדנדה בקצב אחיד. בתדירויות מסוימות נקבל גל עומד (כך שמספר שלם של חצאי אורך הגל - נכנסים במסגרת הסבון).

אפשר לשכלל את הניסוי על ידי כך שנפעיל רמקול המחובר למחולל אותות, והמשמיע צליל בתדירות הניתנת לכיוון. "נסרוק" את תחומי התדירויות האפשריים. בכל פעם שהמערכת תחולל תדירות עצמית של מתקן הסבון - נקבל גל עומד חזק ומרשים. מעניין לבדוק צורות שונות של מסגרות, המכתיבות תנאי שפה שונים בקצות משטח הסבון.

מידע נוסף ראו ברשימת המקורות: (French 1971).

אנו נוגעים כאן בתחום רחב של נושאים הקשורים למוזיקה ופיזיקה, ראו הפניה להרחבות ברשימת המקורות.

רעיון ייחודי להמחשת גלים עומדים במשטח דו ממדי:

ממלאים גיגית (רצוי עגולה) של מים ועוטפים אותה ביריעת ניילון גדולה.

מצמידים היטב את הניילון למים ללא בועות אוויר. (הניילון משמש קרום חזק ונוח המפריד בין הנוזל לאוויר.)

כעת ניתן להניח יד על השקית מבלי שהיד תירטב ומבלי שתחדור למים.

אופן תנודה ראשון: לחיצות קצובות במרכז הגיגית וסילוק היד.

אופן תנודה שני: לחיצות קצובות לסירוגין יד ימין יד שמאל (בשליש ושני שליש הגיגית) וכו'.

כך ניתן לחוש ולראות **אופני תנודה נורמליים** שונים - במשטח דו ממדי.

מקורות והערות לפרק ט'

המקורות וההערות על פי סדר הנושאים שנידונו בפרק:

1. התאבכות - מקור צבעוניותם של קרומי הסבון
2. הכנת תערובת טובה לבועות סבון. תרגום יחידות מידה שונות
3. גלים עומדים בקרום הסבון. על הקשר בין מוזיקה לבין מתמטיקה ופיזיקה.

1. התאבכות - מקור צבעוניותם של קרומי הסבון

היואיט, פול ג' (1997). *פיסיקה לכל - עקרונות מדע החומר והאנרגיה.* ירושלים: הוצאת מכון ברנקו וייס לטיפוח החשיבה. חלק ו' אור, פרק 28: גלי אור, עמ' 518-531.

קירש, יורם (1998). *יסודות הפיסיקה ב':* מגנטיות, גלים, אופטיקה ופיסיקה מודרנית. תל אביב: האוניברסיטה הפתוחה. קורס מס' 20114, יחידה 3, פרק 4, עמ' 52-59.

פיינמן, ריצ'רד פ' (1988). *התיאוריה המוזרה של אור וחומר.* תרגם: דודו פונדק. תל אביב: הקיבוץ המאוחד. על קרומים דקים ראו עמ' 36-39. על סריג עקיפה, תקליטור, נוצצים וכו' ראו עמ' 48-52. על שבירה של אור, עקרון פרמה באופטיקה ופטה מורגנה (מיראג', מחזה שרב), עמ' 53-55.

המקור באנגלית:

Feynman, R. P. (1985). QED the strange theory of light and matter

2. הכנת תערובת טובה לבועות סבון. תרגום יחידות מידה שונות

ישנם מקורות רבים לעניין הכנת תמיסת סבון יציבה וחזקה.

פירוט רב של מקורות הבאנו בסוף פרק ז'.

מקור חשוב ביותר הוא האתר המעולה של **האקספלורטוריום של סן פרנסיסקו:**

San Francisco Exploratorium Bubbles Web pages:

http://www.exploratorium.edu/ronh/bubbles/bubbles.html

באתר האקספלורטוריום יש פירוט רב על קרומי סבון, הכנת סבון, ביבליוגרפיה מגוונת וקישורים לאתרים באינטרנט.

ראו באתר זה כמה הצעות לתמיסות סבון יציבות.

מקור חשוב נוסף בעניין הכנת תמיסת סבון הוא ספרו של בויס:

בויס, צ"ו (1966). *בועות סבון והכוחות המעצבים אותן*. תרגם: ד"ר חיים בן עמרם. תל אביב: ספרית מדע לעם. הוצאת דביר ועם עובד, עמ' 112-113.

אחת הבעיות העולות בניסיון ליישם המלצות אלו היא שהן נמסרות ביחידות שונות. השתדלנו להציג את ההמלצות לתמיסות הסבון **ביחסים בין הכמויות**, אך בחלק מן המקורות מציעים המלצות על פי כמויות מוחלטות תוך כדי עירוב של יחידות.

למשל, אחת ההמלצות:

2/3 ספל סבון כלים נוזלי : 1 גלון מים : 2.5 כף גדולה גליצרין.

במקרה כזה עולה מיד השאלה:

מה הוא בדיוק הנפח של ספל?

מה הוא בדיוק הנפח של גלון (ודרך אגב ישנו גלון אמריקני ויש גלון קנדי - בריטי...).

מה הוא בדיוק הנפח של כף גדולה?

כדי לפענח את ההמלצות הניתנות באתר זה, יש לתרגם את הכמויות הנתונות ליחידות מוכרות.

ניעזר בכמה נתונים מתוך פרסומי **המכון הלאומי האמריקני לתקנים וטכנולוגיה:**

1 gallon (U.S.) (gal) = 3.785412 liter (L)

1 gallon [Canadian and U.K. (Imperial)] (gal) = 4.54609 liter (L)

1 cup (U.S.) = 0.2365882 liter (L) = 236.5882 milliliter (mL)

1 tablespoon = 14.78676 milliliter (mL)

לפי הקבועים הללו, נוכל לפרש את ההמלצות לתמיסת סבון - כפי שהן מוצעות באתר של האקספלורטוריום.

אנו יכולים להניח כי הגלון שנרשם באתר זה הוא גלון אמריקני.

חישבנו בדיוק רב את היחסים בין נפחי המרכיבים השונים - אך כפי שהבהרנו בראשית דברנו, אלו יחסים מקורבים בלבד, ובכל מקרה יש לנסות ולהתאים את המינון לסוג החומרים המרכיבים את התמיסה.

מקור הנתונים לתרגום היחידות:

תרגום היחידות: גלון, כוס - ספל, כף גדולה - מבוססים על נתונים עדכניים, כפי שהם מופיעים בשנת 2001 ברשת. הנתונים לתרגום היחידות, מתוך:

The NIST Reference on Constants, Units and Uncertainty, 1995

NIST = National Institute of Standards and Technology - Physics Laboratory.

מתוך האתר של המכון הלאומי האמריקני לתקנים וטכנולוגיה:
http://physics.nist.gov/

Taylor, B.N. (1995). *Guide for the use of the international system of units* (SI). NIST Special Publication 811, 1995 Edition. U.S. Department of Commerce, Technology Administration, National Institute of Standards and Technology.

3. גלים עומדים בקרום הסבון

גלים עומדים במשטח דו ממדי: לתופף על קרום הסבון

נושא זה קשור לתחום רחב ומרתק: מוזיקה ופיזיקה. אנו מביאים כאן מקצת דוגמאות:

French, A.P. (1971). Vibrations and waves. The MIT Introductory Physics Series. pp. 181-188. New York: W. W. Norton & Company Inc.

בספרו של פרנץ' מוצגים גם גלים עומדים בקרום סבון (Fig. 6-12, p. 185) המודגמים על ידי פרופ' הדסון.

שושני, י' (2001). יופי של מספרים וצלילים. *גלילאו*, גיליון 44, עמ' 40-46. זהו מאמר מרתק על מוזיקה, מתמטיקה ומספרים ועל הקשר שבין מלכת המדעים למלכת האמנויות.

ריסט, ק' (2000). שרירי שירה. *גלילאו*, גיליון 39, עמ' 48-50.

כהן, ד' (1983). *אקוסטיקה ומוסיקה*. ירושלים: אקדמון.

דה-סאוזה, פ' (1983). פיסיקה לקול התוף. *פי האטום*, ב'-1, עמ' 11-20.

מצגר, א' (1969). מוסיקה ומדע. *מדע*, י"ג-5, עמ' 294-300.

The Physics of Kettledrums, *Scientific American*, Nov. 1982, pp. 147-152.

Anfilov, G. (1966). *Physics and Music*. Moscow: Mir Publishers.